Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Semejanza: una propuesta didáctica para 2º de ESO

Autor: Beatriz Marín Irigaray

Director: Alberto Arnal Bailera

Junio de 2015

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático que voy a enseñar es la semejanza. Una primera idea de la semejanza es la relación en tamaño entre dos figuras, con formas idénticas. Es decir, dos figuras son semejantes cuando sus lados son proporcionales y los ángulos formados entre ellos son iguales.

La semejanza se introduce en 2º ESO, y en cursos posteriores de la Educación Secundaria Obligatoria se sigue trabajando y ampliando este objeto matemático.

Según la Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, dicho objeto matemático se da en la asignatura de Matemáticas, y forma parte del bloque 4, que es el relacionado con la Geometría. La Geometría se suele impartir después del bloque de Álgebra y antes del bloque de Estadística y Probabilidad.

Los contenidos relacionados con la semejanza, según el currículo aragonés son los que se detallan a continuación:

- *El triángulo. Semejanza de triángulos: teorema de Thales. Criterios de semejanza de triángulos.*
- *Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Homotecia.*
- *Utilización de los teoremas de Thales para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.*
- *Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.*

Los criterios de evaluación referidos a la semejanza, que se observan en el currículo aragonés son los siguientes:

- *Identificar relaciones de proporcionalidad geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar* *la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata asimismo de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, el cálculo de porcentajes, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad. Además, los estudiantes deberán reconocer la proporcionalidad entre las medidas de los lados homólogos y la igualdad de los ángulos entre dos triángulos o dos cuadriláteros semejantes, y emplearlas para resolver problemas sencillos de medidas indirectas; también deberán ser capaces de utilizar la homotecia para producir figuras semejantes de una razón dada y justificar la pertinencia de la construcción mediante la identificación de triángulos en la «posición de Tales», así como hacer la lectura de un plano o de un mapa, del cual se conozca la escala, en términos de medidas reales, y también trasladar al plano elementos de la realidad aplicándoles el factor de escala.*

- *Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada. Mediante este criterio se valora la capacidad para comprender y diferenciar los conceptos de longitud, superficie y volumen y seleccionar la unidad adecuada para cada uno de ellos.*

El campo de problemas que se pretende enseñar es un campo basado en la interpretación de figuras semejantes, en las que mediante reducciones o ampliaciones de una figura, se obtendrá otra figura semejante a ella. Se propondrá una razón de ser para introducir el concepto de figuras semejantes, y hacer una distinción entre igualdad y semejanza. A partir de unas figuras semejantes, se pretende que los alumnos vean por si mismos la relación entre los perímetros y las áreas de dichas figuras. Por último, para introducir el Teorema de Tales se propondrá un campo de problemas basado en medidas inaccesibles mediante triángulos, y se relacionará este problema con las razones de ser históricas que dieron lugar a este campo de problemas. Con todo esto, se pretende que los alumnos sean capaces de resolver problemas basados en semejanzas, cálculo de escalas, reducción y ampliación de figuras, y cálculo de alturas y medidas inaccesibles.

Las técnicas que se pretenden enseñar en esta unidad didáctica son el cálculo de figuras semejantes, a partir de una figura dada y el cálculo de un perímetro o área, a partir de otra figura semejante, mediante una escala o una razón de semejanza. También se pretende que aprendan las técnicas para la división de segmentos en partes iguales o en partes proporcionales mediante la aplicación del teorema de Tales. Por último se explicarán técnicas para el cálculo de medidas inaccesibles, mediante triángulos y la aplicación del teorema de Tales.

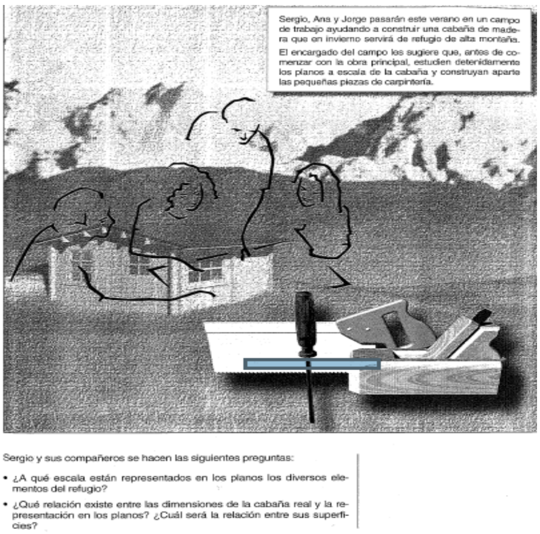
La justificación de las técnicas que se pretenden enseñar va a estar basadas en las propias definiciones. Sin embargo, para el teorema de Tales, se hará una justificación mediante una comprobación con GeoGebra, modificando los lados y los ángulos de los triángulos para que tengan una mayor visualización e interpretación del teorema. En cuanto a los criterios de semejanza de los triángulos también se hará una justificación para que interioricen mejor este concepto.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Para ver cómo se justifica habitualmente la introducción escolar de la semejanza, se puede realizar una comparativa de la introducción escolar en los diferentes libros de texto. Así, se puede observar que, generalmente, lo introducen mediante las escalas, y con pequeñas historias donde nombran la semejanza, y donde se puede ver la necesidad de una escala.

Se expone ahora los libros de texto consultados haciendo un análisis comparativo de la introducción escolar de la semejanza.

En el libro de la editorial Edebé 1997 de Matemáticas para 2º ESO emplean un punto de vista diferente a lo que veremos en los siguientes libros de texto. En primer lugar analizan los conocimientos previos importantes que se necesitan para afrontar este tema, y explican las competencias que van a ser capaces de manejar. A continuación les plantean una razón de ser de la semejanza, mediante un problema de escalas en el que tienen que construir una cabaña de madera dado un plano a escala de la cabaña, y así los alumnos verán la necesidad de tener medidas para su construcción con las preguntas que les plantean. Las preguntas que les sugiere el libro son: ¿a qué escala están representados los objetos? o ¿cuál será la relación de las superficies?


Sergio, Ana y Jorge pasarán este verano en un campo de trabajo ayudando a construir una cabaña de madera que en invierno servirá de refugio de alta montaña.

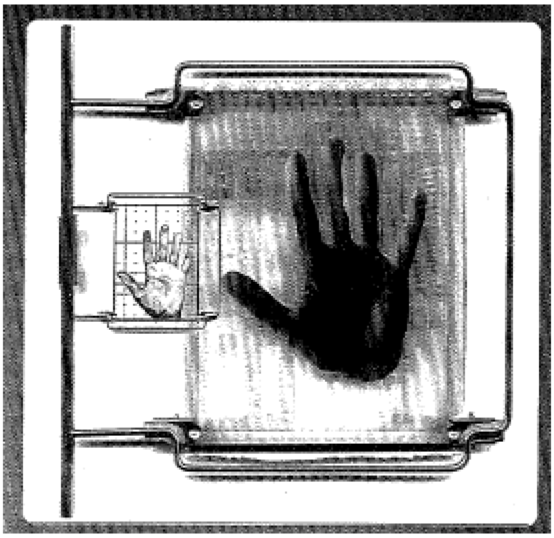
El encargado del campo les sugiere que, antes de comenzar con la obra principal, estudien detenidamente los planos a escala de la cabaña y construyan aparte las pequeñas piezas de carpintería.

Sergio y sus compañeros se hacen las siguientes preguntas:

- ¿A qué escala están representados en los planos los diversos elementos del refugio?
- ¿Qué relación existe entre las dimensiones de la cabaña real y la representación en los planos? ¿Cuál será la relación entre sus superficies?

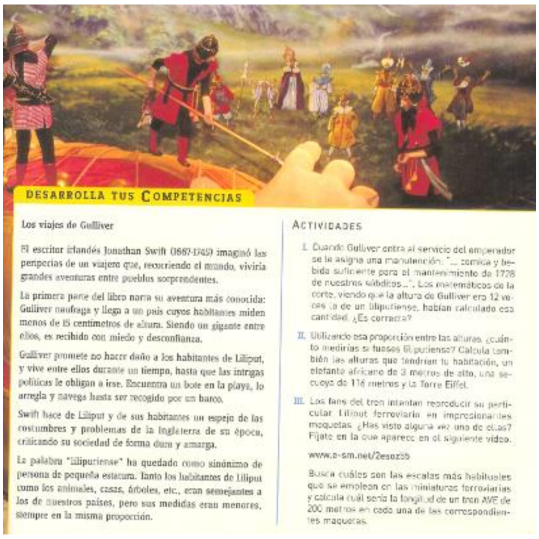
En el libro de la editorial Vicens Vives 2003 de Matemáticas para 2º ESO, el enfoque que usan para la introducción de la semejanza es similar a lo que veremos que emplean en la editorial SM. Emplean figuras para analizar que dichas figuras pueden ser semejantes con unas características determinadas que se analizarán a lo largo del tema.

En este libro hacen la semejanza a partir de una fotocopiadora, en el que se ve que el tamaño de la mano queda reducida al hacer la fotocopia, pero son semejantes, como se aprecia en la siguiente imagen:



Por último quiere hacer una comparativa entre dos libros de texto de la misma editorial, pero en diferentes años. Así, en el libro de la editorial SM 2004 de Matemáticas-Números para 2º ESO, se puede observar que introducen la semejanza mediante unas imágenes, donde se puede observar que algunas son semejantes a la figura primera, y otras no son semejantes. Así el libro analiza algunos ejemplos y contraejemplos de figuras semejantes. En las figuras que son semejantes, se puede observar que hay un factor de ampliación o disminución en las figuras, como vemos en la siguiente imagen:

Sin embargo, en un libro posterior de la misma editorial, de la editorial SM 2011 de Matemáticas-Pitágoras para 2º ESO, se puede observar que introducen la semejanza mediante una historia de los viajes de Gulliver, en los que los habitantes de Liliput eran menores de 15 cm. Con esta historia, el libro de texto intenta reflejar que los habitantes eran semejantes a nosotros, ya que eran menores de altura, pero con la misma forma. La introducción que emplean se puede ver en la siguiente imagen:



DESARROLLA TUS COMPETENCIAS

Los viajes de Gulliver

El escritor irlandés Jonathan Swift (1667-1745) imaginó las peripecias de un viajero que, recorriendo el mundo, viviría grandes aventuras entre pueblos sorprendentes.

La primera parte del libro narra su aventura más conocida: Gulliver naufraga y llega a un país cuyos habitantes miden menos de 15 centímetros de altura. Siendo un gigante entre ellos, es recibido con miedo y desconfianza.

Gulliver promete no hacer daño a los habitantes de Liliput, y vive entre ellos durante un tiempo, hasta que las intrigas políticas le obligan a irse. Encuentra un bote en la playa, lo arregla y navega hasta ser recogido por un barco.

Swift hace de Liliput y de sus habitantes un espejo de las costumbres y problemas de la Inglaterra de su época, criticando su sociedad de forma dura y amarga.

La palabra "liliputiense" ha quedado como sinónimo de persona de pequeña estatura. Tanto los habitantes de Liliput como los animales, casas, árboles, etc., eran semejantes a los de nuestros países, pero sus medidas eran menores, siempre en la misma proporción.

ACTIVIDADES

I. Cuando Gulliver entra al servicio del emperador se le asigna una manutención: "... comida y bebida suficiente para el mantenimiento de 1728 de nuestros súbditos...". Los matemáticos de la corte, viendo que la altura de Gulliver era 12 veces la de un liliputiense, habían calculado esa cantidad. ¿Es correcta?

II. Utilizando esa proporción entre las alturas, ¿cuánto medirías si fueses liliputiense? Calcula también las alturas que tendrían tu habitación, un elefante africano de 3 metros de alto, una secuoya de 116 metros y la Torre Eiffel.

III. Los fans del tren intentan reproducir su particular Liliput ferroviario en impresionantes maquetas. ¿Has visto alguna vez una de ellas? Fíjate en la que aparece en el siguiente vídeo.

www.e-sm.net/2esoz35

Busca cuáles son las escalas más habituales que se emplean en las miniaturas ferroviarias y calcula cuál sería la longitud de un tren AVE de 200 metros en cada una de las correspondientes maquetas.

Los campos de problemas que se usan para la enseñanza de este objeto matemático son escasos. El campo de problemas de las escalas puede dar lugar a diversos tipos de problemas de la vida real, que es un tema que sería importante tratar en el aula con los alumnos.

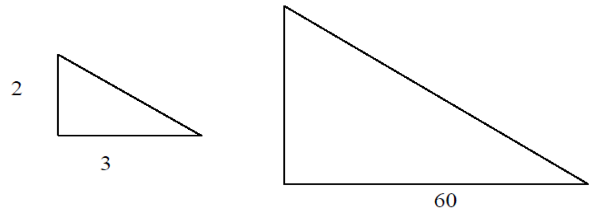
Algunos de los problemas que cabe destacar son problemas de cálculo de triángulos y problemas de semejanzas. Abundan los ejercicios en los que se dan varias figuras y el alumno tiene que encontrar su razón de semejanza y analizar si son semejantes. También hay ejercicios de aplicación del Teorema de Tales, en los que el alumno tiene que encontrar una medida para que los triángulos estén en posición de Tales. Por último, otro tipo de problemas que se les plantea es calcular la distancia real entre dos ciudades mediante un plano dado por una escala.

Las técnicas que se enseñan habitualmente están basadas en proporciones como en el caso de cálculo de figuras semejantes que usan la proporcionalidad de segmentos, o en el cálculo de distancias inaccesibles. También se puede observar que se interpreta la escala como una fórmula como técnica de cálculo de escalas. Además, se suelen dar técnicas basadas en la razón de semejanza, para calcular la razón de las longitudes y áreas. Por último, en algunos libros se muestran técnicas basadas en la homotecia o en el método de la cuadrícula para la construcción de figuras semejantes.

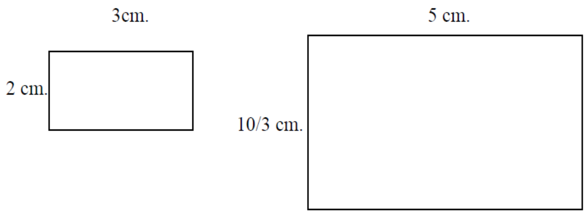
Las tecnologías que se usan habitualmente para la enseñanza de este objeto matemático son muy escasas. Los libros de texto no suelen dar la demostración del Teorema de Tales ni de los criterios para determinar la semejanza de triángulos. Las tecnologías que se suelen abordar son demostraciones a partir de las propias definiciones, o mediante la medida de los segmentos para comprobar que es cierto el enunciado. En general, en los libros de texto de estos niveles no sueles encontrarte con las demostraciones de las técnicas que se explican.

Esta enseñanza produce dificultades a los alumnos cuando intentan resolver las tareas. En el artículo de "Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza" de E. Gualdrón y A. Gutiérrez publicado en el simposio SEIEM en 2006, se recogen algunas de las dificultades que se encuentran los alumnos en el aprendizaje de la semejanza. Algunos de los más importantes se detallan a continuación:

- Algunos estudiantes cuando se les pide ampliar, reducen, y cuando se les pide reducir, amplían.
- Evitan multiplicar por una fracción y tienden a hacer una construcción progresiva de la respuesta a partir de una relación que establecen entre elementos de la situación. Por ejemplo, en el siguiente ejercicio de cálculo de un lado, evitan multiplicar por la fracción $\frac{3}{2}$, y establecen una construcción progresiva de 3 a 2, luego 6 a 4, 9 a 6, 12 a 8, y así sucesivamente hasta llegar a 60 a 40, para concluir que el lado mide 40.



- No reconocen la semejanza de figuras en un dibujo cuando las medidas de los lados no son múltiplo entero de las medidas de los lados de la otra figura, y tienden a decir que no son semejantes. Por ejemplo, a los alumnos les cuesta ver la semejanza de estos dos rectángulos, porque los lados de una figura no son múltiplos enteros de los lados de la otra figura.

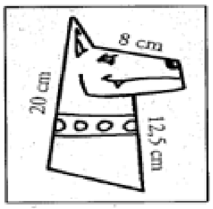


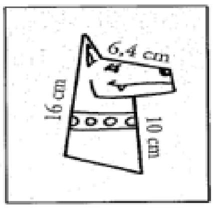
- Para la ampliación de figuras semejantes se concentran en la diferencia a-b y no en la razón a/b, por lo que no aplican bien el concepto de razón de semejanza.
- Omisión de parte de los datos del problema: es frecuente en la resolución de problemas de razón y proporción y consiste en que los estudiantes ignoran parte de los datos del problema.

Además de estos errores encontrados en este simposio, también hay otros errores comunes que conviene destacar que he podido observar en mi estancia en el Prácticum en el colegio, durante mi realización de la unidad didáctica:

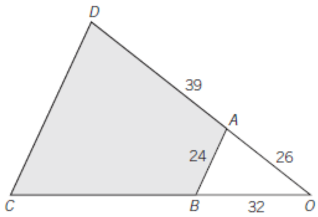
- Describir con la palabra "parecido" figuras que son semejantes o iguales.
- Elaborar criterios de semejanza incorrectos tomando algunas de las condiciones de dos criterios correctos.
- Generalizar la razón de semejanza para la razón entre las áreas. Así, por ejemplo, en los ejercicios en los que tenemos una razón de semejanza $k = \frac{1}{2}$, y el área de la primera figura es de 20 cm^2, los alumnos te dicen que el área de la figura semejante es de 20 cm^2, porque multiplican la razón de semejanza por el área de la primera figura, sin tener en cuenta que la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.
- Extender la notación 1:n de reducción a la escala de ampliación, en vez de utilizar la escala n:1. Por ejemplo, cuando les propones un ejercicio en el que la escala es de ampliación 10:1, reconocen que es de ampliación, pero te ponen la notación de escala de reducción 1:10.
- Interpretar con dificultad la razón de semejanza a partir del coeficiente de reducción de una fotocopiadora. Por ejemplo, cuando se les pide cuál ha sido la reducción de la fotocopiadora dada las imágenes siguientes, los alumnos dicen que el coeficiente de reducción es del 20% porque se ha reducido un 20%, en vez de decir que el coeficiente

de reducción es del 80%, ya que el coeficiente de reducción coincide con la razón de semejanza.





- Resolver erróneamente los ejercicios de aplicación del teorema de Tales.



Cuando les pides calcular los lados que faltan en esta figura; es decir, los segmentos BC y CD, no suelen tener problemas para calcular el lado BC, pero para calcular el lado CD, los alumnos hacen una generalizacion del teorema de Tales, y hacen:

$\frac{26}{24} = \frac{39}{x}$, lo que es incorrecto, y lo correcto sería: $\frac{26}{24} = \frac{26+39}{x}$.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

Para afrontar el aprendizaje de la semejanza, los alumnos tienen que tener unos conocimientos previos en algunos bloques de las matemáticas, como son la geometría y los números.

Así, el bloque de las matemáticas que más conviene recordar es la geometría. Los alumnos para la semejanza tienen que ser capaces de recordar los conceptos principales de la geometría como son los puntos, las rectas, segmentos, ángulos y rectas paralelas y perpendiculares. Además tienen que recordar los tipos de triángulos que hay según la medida de sus ángulos y lados, y saber cuánto es la suma de los ángulos interiores de un triángulo. También deben reconocer algunas de las principales figuras geométricas y saber calcular su perímetro y su área. Por último, también tendrán que recordar el teorema de Pitágoras, que lo habrán dado en ese mismo curso.

Además del bloque de la geometría, los alumnos deben conocer la propiedad fundamental de las proporciones $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c\right)$, por lo que también conviene repasar la proporcionalidad numérica. También es importante que los alumnos tengan soltura en el cambio de unidades de medidas. A parte de todo esto, los alumnos tienen que poder operar con fracciones, radicales, y en general, todo tipo de operaciones aritméticas.

La enseñanza anterior se puede presuponer que sí que ha propiciado que el alumno adquiera estos conocimientos previos porque todos son contenidos mínimos de cursos anteriores de primaria y ESO según el BOA.

Así, según la Orden de 9 de mayo del 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, los conceptos necesarios de la geometría aparecen todos en la etapa de Primaria. A continuación expongo los contenidos dados en Primaria:

Bloque 3. Geometría

- *Ángulos en el plano y en el espacio.*
- *Formas espaciales. Poliedros y cuerpos redondos: elementos, características y clasificación.*

- *Formas planas. Del espacio al plano: superficies de poliedros y cuerpos redondos, sombras, cortes, etc. Triángulo: relación entre lados, y entre lados y ángulos. Polígonos: elementos, características y clasificación. Círculo y circunferencia: elementos y características. Regularidad y simetría.*
- *Geometría métrica. Segmento: medidas de segmentos. Perímetros de polígonos. Longitud de la circunferencia. Área del rectángulo. Área del triángulo. Área de polígonos. Área lateral y total de poliedros. Área del círculo. Búsqueda de los elementos necesarios para que, realizando medidas precisas, se pueda obtener el tamaño de las figuras.*
- *Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos.*
- *Semejanza de figuras: ampliaciones y reducciones. Escalas. Planos, mapas y maquetas.*
- *Identificación precisa de conceptos del plano y del espacio. Puntos, rectas y planos en el espacio: características y relaciones. Posiciones relativas de dos planos en el espacio: incidencia (perpendicularidad) y paralelismo. Puntos y rectas en el plano: características y relaciones. Posiciones relativas de dos rectas en el plano: incidencia (perpendicularidad) y paralelismo. Posiciones relativas de rectas y circunferencias.*
- *Ángulos. Elementos. Tipos. Cálculo con ángulos.*

Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de cantidades de magnitudes.

- *Longitud, capacidad, masa, tiempo y superficie.*
- *Identificación de unidades en el Sistema Métrico Decimal: símbolos y abreviaturas. Múltiplos y submúltiplos de uso cotidiano. Elección de la unidad más adecuada para expresar el resultado de una medida.*
- *Equivalencia entre unidades del sistema métrico decimal de una misma magnitud. Símbolos y abreviaturas.*

Además de los conocimientos adquiridos en Primaria, el alumno también adquiere conocimientos y amplia en 1º ESO. Estos contenidos que adquiere vienen recogidos en la Orden de 9 de mayo del 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón:

Bloque 4. Geometría

- *Elementos básicos de la geometría del plano. Punto, recta y segmento. Posición relativa de rectas: incidencia y paralelismo. Ángulos: propiedades. Medida de ángulos: operaciones. La perpendicularidad.*
- *Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad.*
- *El triángulo. Descripción, elementos, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo.*
- *Polígonos: descripción, elementos, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo.*
- *Estimación y cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación.*

Bloque 2. Números

- *Medida. Las magnitudes: cualidades de los objetos que pueden medirse. El proceso de medida: secuencia y decisiones. Expresión del resultado de la medida en las unidades y con la precisión adecuada a la situación.*
- *Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Aplicación de la proporcionalidad.*

Por último, en 2º ESO, anteriormente a la semejanza, se introduce el teorema de Pitágoras, y se sigue trabajando con la proporcionalidad, como viene recogido en el currículo aragonés:

Bloque 2. Números

- *Medida. Planificación de tareas de medición previendo los recursos necesarios, el grado de precisión exigido, la unidad de medida, la técnica que se vaya a utilizar, etc. Utilización diestra de instrumentos de medida. Expresión del resultado de la medida en las unidades y con la precisión adecuada a la situación. La medida del tiempo y los ángulos.*
- *Magnitudes directamente e inversamente proporcionales. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Porcentajes.*

Bloque 4. Geometría

- *Utilización del teorema de Pitágoras para obtener medidas.*

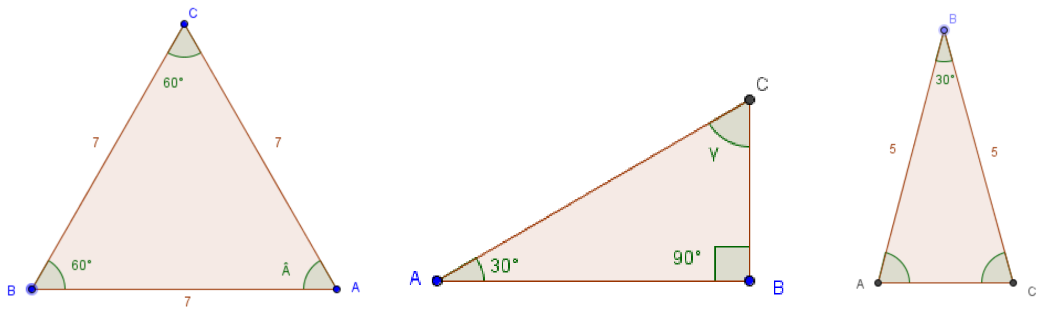
Para afrontar el de la semejanza, se necesitan algunos conocimientos previos adquiridos durante los cursos anteriores, y durante ese mismo curso. Por ello, conviene hacer un recordatorio de los principales conceptos que necesitarán los alumnos para afrontar el aprendizaje de la semejanza. En este sentido, se realizarán una serie de actividades para que sirvan al alumno de recordatorio antes de empezar con el nuevo objeto matemático.

Estas actividades van a ser unos ejercicios sencillos de algunos conocimientos que se necesitarán. Servirá, por una parte, al alumno para recordar los conceptos, pero también servirá al profesor para tener un mayor conocimiento de los conocimientos que tienen los alumnos. En cuanto a la metodología que se empleará para esta actividad será la realización de los ejercicios propuestos en parejas, para que se puedan ayudar entre ellos, porque algunos alumnos tendrán olvidado estas partes. Cuando acaben cada ejercicio, se realizará una corrección del ejercicio, saliendo los alumnos a corregirlo a la pizarra.

A continuación, muestro los ejercicios que servirán de repaso:

<u>EJERCICIO 1:</u>

Dados los siguientes triángulos, calcula el valor del ángulo o de los ángulos que se piden en cada figura. Reconoce previamente el tipo de triángulo que es, según los ángulos.



EJERCICIO 2:

Expresa las siguientes medidas, en las unidades que se indican:

a) 0,0108 km = _______m

b) 23 km = _______ m

c) 400 cm = _______ m

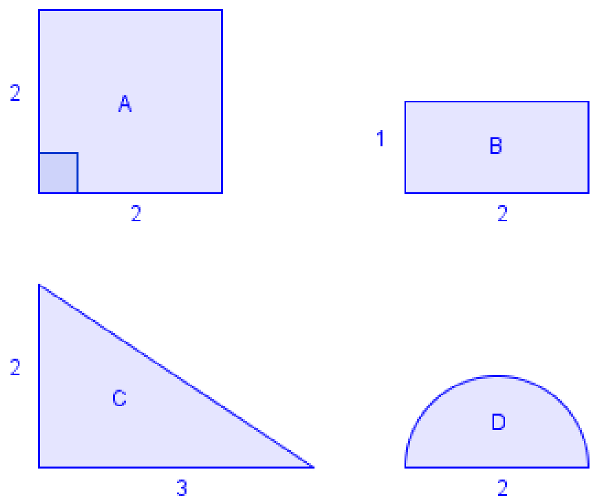
d) 329000 cm^2 = _______ m^2

e) 0,005 m^2 = _______ cm^2

f) 0,00230 km^2 = _______ m^2

EJERCICIO 3:

Calcula el área de las figuras siguientes:



EJERCICIO 4:

Calcula el término desconocido en las siguientes proporciones:

a) $\frac{14}{7} = \frac{x}{2}$

b) $\frac{3}{4} = \frac{9}{x}$

c) $\frac{20}{x} = \frac{5}{3}$

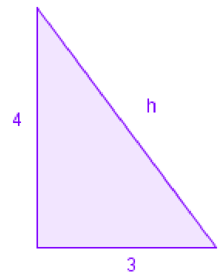
d) $\frac{4}{x} = \frac{36}{63}$

EJERCICIO 5:

Un coche gasta 8 litros de gasolina cada 100 kilómetros. Si quedan 7 litros en el depósito, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer? Resuélvelo mediante proporcionalidad, viendo previamente si es proporcionalidad directa o inversa.

EJERCICIO 6:

Halla el lado que falta del siguiente triángulo rectángulo:



EJERCICIO 7:

La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y uno de los lados mide 80 cm. Calcula su área.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

La razón de ser que se va a tener en cuenta en la introducción escolar de la semejanza es la utilidad de dicho objeto matemático para las escalas, usando reducciones y ampliaciones de figuras.

Además, también se va a dar una razón de ser para el Teorema de Tales, para que vean la necesidad de utilizarlo en algunos problemas propuestos, como en medidas inaccesibles.

Una importante razón de ser de este objeto matemático es la construcción de escalas, y coincide con la razón histórica que dio origen a la semejanza.

Para el estudio de las razones de ser históricas que dieron origen a la semejanza es importante el trabajo de Boyer (2001) sobre la historia de las matemáticas.

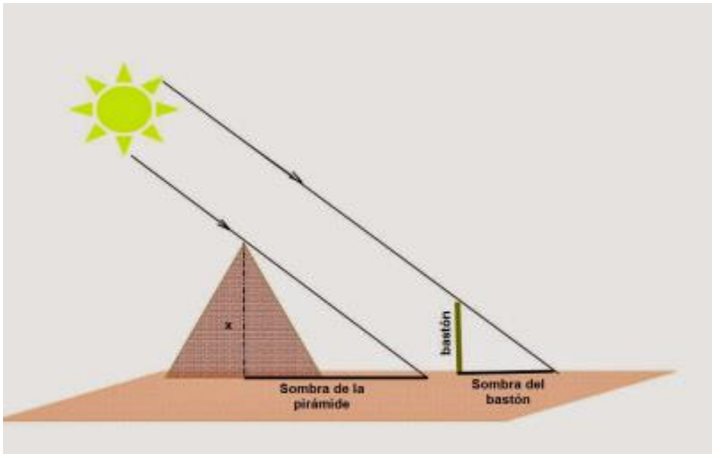
El origen de la geometría es desconocido. Sin embargo, Herodoto dice que la geometría se originó en Egipto por la necesidad de hacer nuevas medidas en la tierra por las inundaciones anuales del Río Nilo, para volver a hacer una estructuración de las parcelas de los terrenos y dar a cada persona, su parte correspondiente. También en Mesopotamia ya usaban el papiro y las tablillas para escribir problemas específicos.

De Tales de Mileto se sabe muy poco, ya que los datos biográficos que se tienen son una mezcla de opiniones atribuidos a personas con mayor o menor grado de verosimilitud. Thales nació en Mileto, aproximadamente en el año 624 a.C. Era considerado un hombre de rara inteligencia y fue considerado un "discípulo de Egipcios" y conocido como el primer matemático verdadero de la geometría deductiva. Son conocidos dos teoremas suyos, que demuestra la semejanza entre dos triángulos:

"Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes (sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados son proporcionales entre sí)."

"Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C. El triángulo ABC resulta ser un triángulo rectángulo."

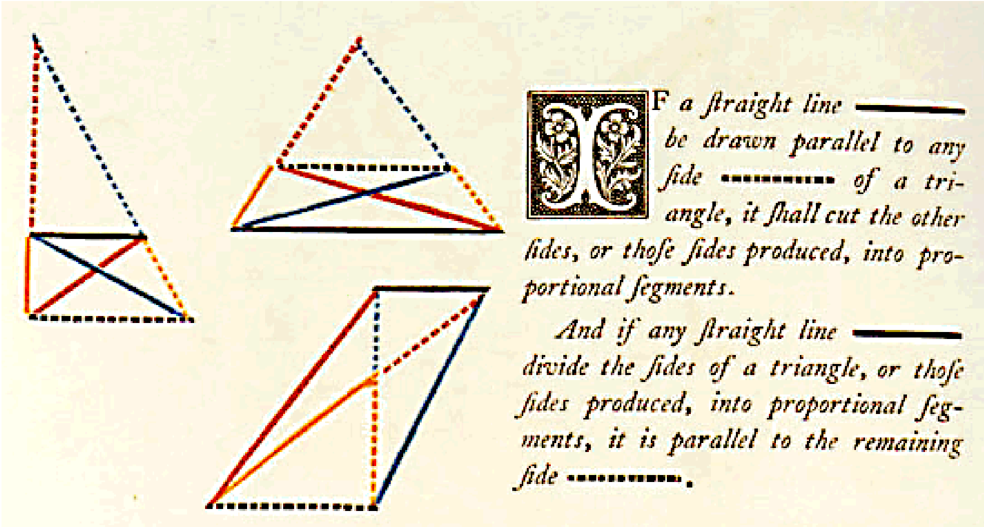
Es muy conocida la leyenda de Taler a cerca de un método de comparación de sombras que Tales utilizó para medir la altura de las pirámides egipcias. La historia dice así: *"Un sacerdote egipcio le pregunta sonriendo cuál puede ser la altura de la pirámide* *del rey Khufu (la pirámide de Keops). Tales reflexiona y a continuación contesta que no se conforma con calcularla a ojo, sino que la medirá sin ayuda de ningún instrumento. Se echa sobre la arena y determina la longitud de su propio cuerpo. Los sacerdotes le preguntan qué es lo que está pensando, y Tales les explica: 'Me pondré simplemente en un extremo de esta línea, que mide la longitud de mi cuerpo, y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide de vuestro Khufu también ha de medir tantos pasos como la altura de la pirámide.' El sacerdote, desorientado por la extrema sencillez de la solución, se pregunta si acaso no hay algún error, algún sofisma, Tales añade: 'Pero si queréis que os mida esa altura, a cualquier hora, clavaré en la arena mi bastón."* El método que utilizó Tales de Mileto para calcular la altura de la Pirámide de Keops es lo que conocemos como Teorema de Tales.



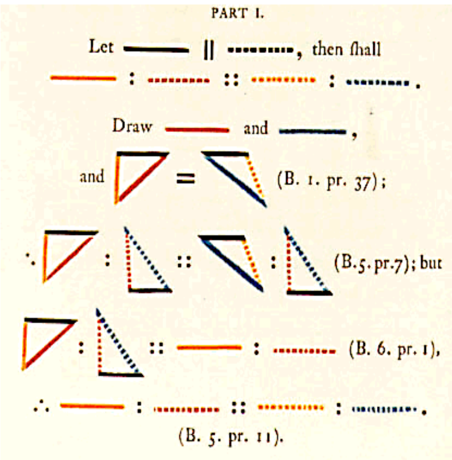
Un procedimiento parecido empleaba para medir la distancia desde la costa hasta barcos en alta mar mediante la proporcionalidad de lados de triángulos semejantes.

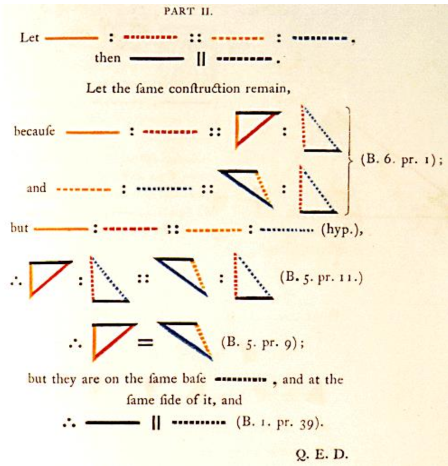
Euclides (siglo IV-III a.C.) escribió el tratado de matemáticas llamado "Los Elementos" hacia el año 300 a.C. Este tratado está divididos en trece libros y capítulos, de los cuales los seis primeros son de geometría elemental. Los elementos es considerado uno de los libros de texto más divulgado en la historia y el segundo en número de ediciones publicadas, después de la Biblia. En los libros del V al X, se tratan los temas de razones y proporciones. Es importante el libro VI de Los Elementos en el que demuestra proposiciones sobre la semejanza de figuras. Las proposiciones sobre el teorema de Tales, y sobre los criterios de semejanza de triángulos son:

Proposición 2*. Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado que queda del triángulo.*

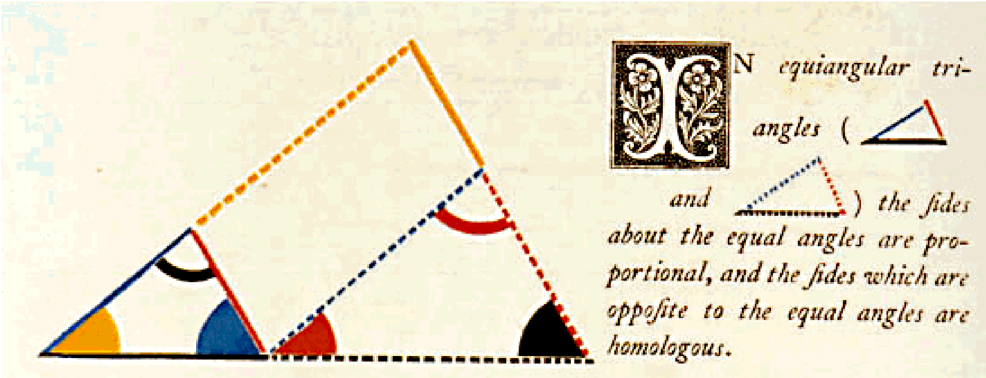


La demostración de esta proposición es la siguiente:

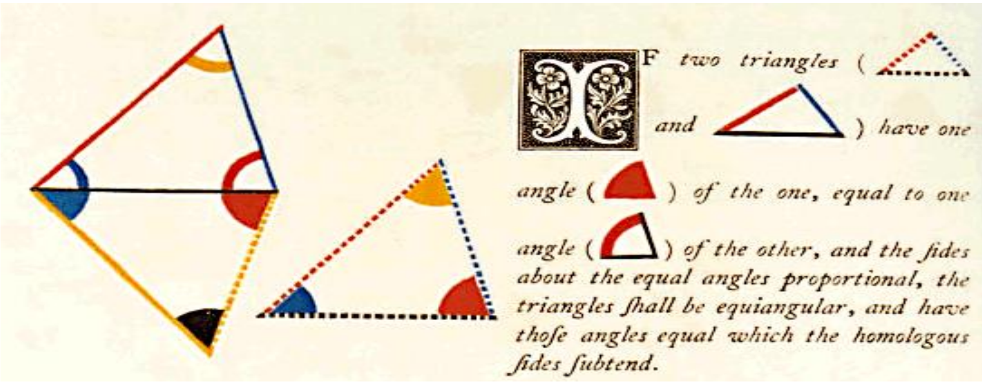




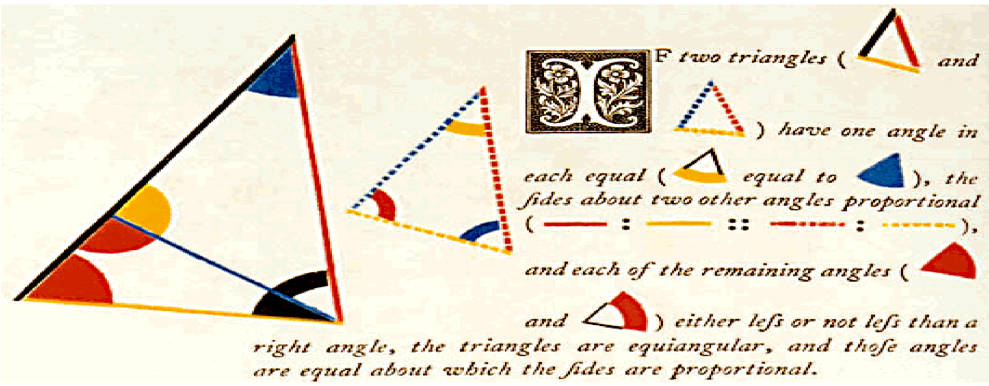
Proposición 4*. En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden a los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden a los ángulos iguales son correspondientes.*



***Proposición 6**. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro, y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.*



***Proposición 7**. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro y tienen proporcionales los lados que comprenden a los otros ángulos, y tienen los ángulos que quedan de manera aparejada menores o no menores a un ángulo recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales.*



Apolonio de Perge escribió un libro llamado Resultados rápidos, entre las que destacan obras como: ¿Cómo dividir una razón?

Durante la segunda mitad del siglo I a.C se estudió mucho sobre la geometría. Por eso se conoce este periodo como la "Edad Heroica de Matemáticas".

Además es importante saber la evolución histórica que ha tenido la semejanza. Así, en la obra de Escudero (2005) viene reflejada dicha evolución, siguiendo el trabajo de Lemonidis que realizó un estudio histórico de los conceptos de semejanza, y los relaciona con la situación correspondiente de la enseñanza, lo que le ha permitido identificar en la enseñanza determinados obstáculos epistemológicos. Dicho autor distingue tres grandes periodos:

*a**)** El griego. La primera demostración del teorema de Thales y algunos teoremas relativos a figuras semejantes se encuentra en los Elementos, de Euclides (s. iv a.C.). Hay que destacar de este periodo y, en general, en el periodo de la influencia de la geometría de Euclides, que las transformaciones no existen como tales.*

*b**)** Del siglo XVI al XVIII. Los problemas de la representación del espacio que surgen en el Renacimiento van a ser el germen para el estudio de las transformaciones. Durante estos siglos, se van a ir desarrollando lentamente, sin que se pueda identificar aún una etapa de utilización consciente y de conceptualización de las mismas. De este periodo, se resalta la consideración de una transformación como un útil en la resolución de problemas.*

*c**)** Siglos XIX y XX. Periodo de la estructuración y algebrización de la geometría. En el siglo XIX se produce la consideración de la homotecia y de la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimenta la geometría, entre las fechas de publicación de la geometría descriptiva de Monge (año 1799) y el Programa Erlangen de Felix Klein (año 1872) y a la evolución del campo numérico.*

A partir de aquí, Lemonidis (1991) identifica tres momentos distintos en el concepto de semejanza, desde los que, a su vez, se pueden determinar tres aproximaciones a ella que deben tenerse presentes cuando se la considera como objeto de enseñanza:

a) Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.

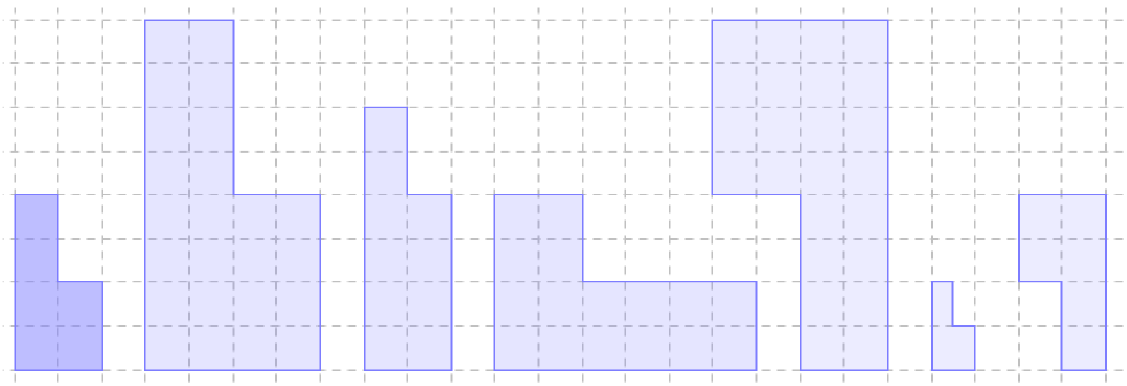
b) Transformación geométrica vista como útil. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como un útil en la resolución de problemas gráficos.

c) Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

En esta unidad didáctica de la semejanza, es conveniente exponer varios problemas que constituyen la razón de ser de dicho objeto matemático. Así, se propone varios tipos de problemas para poder introducir los conceptos de semejanza, relación ente perímetros y áreas, escalas y teorema de Tales.

<u>PROBLEMA 1:</u> Semejanza de figuras.

Dada las siete figuras siguientes donde la primera es la figura principal, razona sobre las preguntas que se plantean a continuación:



a) ¿Cuáles de estos dibujos dirías que es una foto de la figura de la figura principal?
b) ¿Tienen la misma forma que la figura principal? ¿Y el mismo tamaño?
c) ¿Alguna es exactamente igual a la original?
d) Dibuja una figura que sea el doble de la figura principal.

e) Dibuja una figura que sea la mitad de la figura principal, y otra que sea cuatro veces menos que la figura principal. ¿Te sale igual a alguna de las que ya tienes?

Este problema de razón de ser de la semejanza de figuras está basado en una actividad de Mikel Ferrer (2013), en el que se plantean preguntas ambiguas para crear discusión en clase. Así, en las preguntas del doble o la mitad, algunos alumnos podrán representar una figura que tenga cada lado el doble de grande respecto el original, y otros alumnos pueden interpretar como una figura que tenga el doble de área. La cuadrícula servirá de ayuda para la construcción de dichas figuras.

PROBLEMA 2: Relación entre perímetros y áreas.

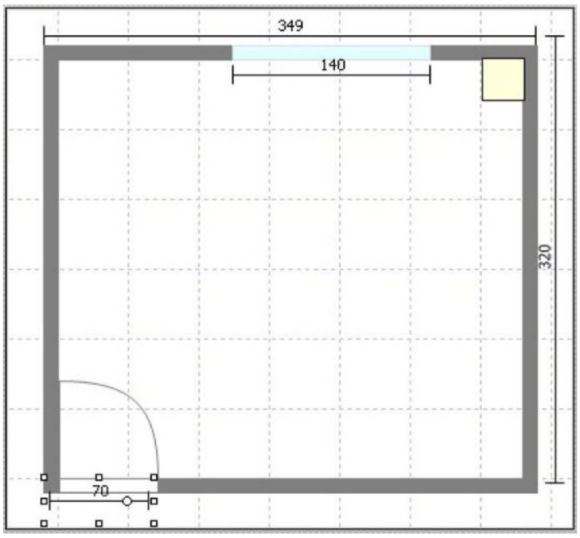
a) A partir del problema 1, calcula el perímetro de la segunda figura y de la sexta figura, que sabemos que la razón de semejanza es $k = \frac{1}{4}$. A continuación haz el cociente entre el perímetro de las figuras citadas. ¿Ves alguna relación entre la razón de semejanza y la razón entre los perímetros?
b) Realiza lo mismo que en el apartado anterior con el área. ¿Ves alguna relación entre la razón de semejanza y la razón entre las áreas?

Este problema de razón de ser de la razón entre perímetros y áreas está planteado para que los alumnos sean capaces de razonar por si mismos sobre la relación que tienen que cumplir los perímetros y las áreas con respecto a la razón de semejanza.

PROBLEMA 3: Escalas.

Pedro quiere redecorar su habitación. Para ello, quiere comprar nuevos muebles, y necesita saber si los muebles le pueden entrar en la habitación.

El plano de su habitación está a escala y sabemos las medidas que se indican en el dibujo, que están expresadas en cm. Averigua qué mesa, cama, mesilla y armario le entra en la habitación y cómo sería la disposición de los muebles en la habitación.



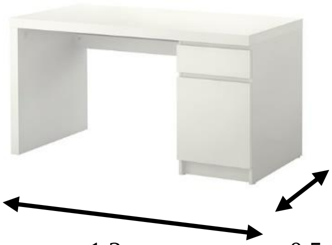
3 m

5 m

2.5 m 1 m

1.50 m 2 m

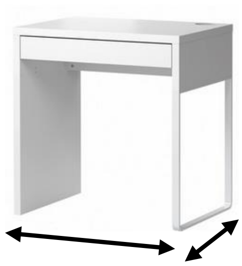
0.9 m 1.5 m



1.2 m 0.5 m

0.5 m 0.5 m

2 m 1 m

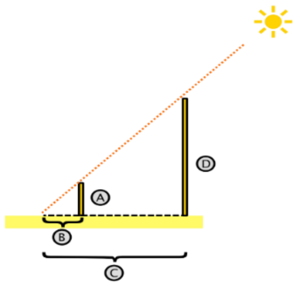


0.7 m 0.5 m

Este problema de razón de ser de escalas está planteado para que los alumnos vean la necesidad de un plano, y de las medidas en la vida. Además los alumnos, mediante proporciones serán capaces de resolver el problema.

<u>PROBLEMA 4</u>: Teorema de Tales.

Halla la altura de la torre del Pilar que sabemos que proyecta una sombra de 15 metros, sabiendo que una persona que mide 1,8 metros al lado de la torre proyecta en ese mismo instante una sombra de 30 centímetros.



Este problema de razón de ser del teorema de Tales está planteado para que los alumnos piensen cómo se puede medir la altura, y piensen en cómo resolverlo.

De acuerdo con la hipótesis metodológica dada en la asignatura de "Fundamentos de didáctica de las Matemáticas", el profesor presentará a los alumnos tareas que contribuyan a una construcción escolar del saber matemático a enseñar, mediante los problemas de razones de ser. Se presentará los problemas de razón de ser cuyos enunciados puedan expresarse en términos de saberes anteriormente aprendidos, pero que dé sentido al nuevo objeto de saber, que justifique la necesidad de construirlo como medio para resolver dichos problemas. Los campos de problemas pondrán de manifiesto nuevos aspectos del objeto matemático a enseñar, así como la ejercitación en las técnicas que resuelven los problemas y la reflexión sobre las tecnologías y teorías que las justifican. Además se pretende que el alumno adopte un papel protagonista, tomando decisiones, y reflexionando sobre la pertinencia de dichas decisiones y la necesidad de modificarlas, y no ser un mero receptor de las explicaciones del profesor. Así, con estos problemas de razón de ser se pretende que los alumnos se inicien en la semejanza, y sean capaces de descubrir técnicas por ellos mismos.

Para la resolución de los problemas de razón de ser los alumnos trabajarán en grupos de 2-3 personas para que trabajando en equipos sean capaces de descubrir soluciones, y den entre ellos posibles ideas para la resolución. Además el docente examinará el trabajo de los alumnos, y les ayudará en sus razonamientos, indicándoles el camino que pueden tomar.

E. Sobre el campo de problemas

El campo de problemas que se presenta está recogido de los distintos libros de texto que se han nombrado, y se pueden consultar en la bibliografía. Se propone un campo de problemas para trabajar las siguientes técnicas:

- Campo 1: Figuras semejantes. Razón de semejanza.
- Campo 2: Razón de longitudes y áreas.
- Campo 3a: Escalas. Distancias y áreas en un mapa.
- Campo 3b: Escalas. Distintas formas de expresar la escala.
- Campo 4: Semejanza de triángulos. Teorema de Tales. Triángulo en posición de Tales.
- Campo 5: División de segmentos en partes iguales y en partes proporcionales.
- Campo 6: Construcción de polígonos semejantes.
- Campo 7: Criterios para determinar la semejanza de triángulos.
- Campo 8: Calcular distancias inaccesibles.

A continuación se presentan los problemas divididos por los campos de problemas anteriormente citados.

Campo 1: Figuras semejantes. Razón de semejanza.

En este campo de problemas se van a proponer problemas sobre figuras semejantes y la razón de semejanza.

<u>PROBLEMA 1.1:</u>

Las siguientes ternas de números representan las longitudes ordenadas de los lados de una pareja de triángulos semejantes. Calcula, en cada caso, la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

a) 3, 4, 6 4.5, x, y
b) x, 4, 3 2, 2, y
c) x, y, 8 12, 20, 25

PROBLEMA 1.2:

Las medidas de un rectángulo son 5 y 10 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que el lado mayor mida 5 centímetros. ¿Cuál es la razón de semejanza?

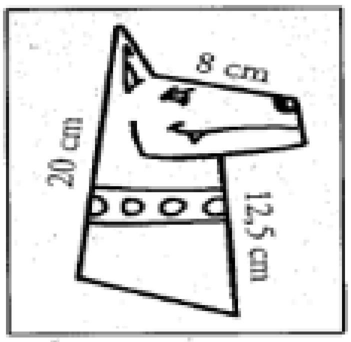
PROBLEMA 1.3:

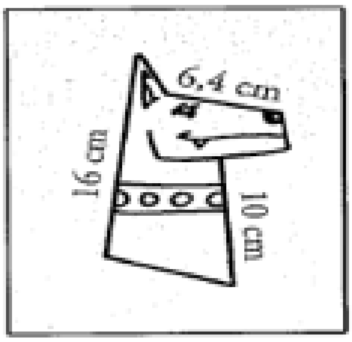
Las dimensiones de un rectángulo son 2 cm y 3 cm. ¿Cuáles de los siguientes rectángulos son semejantes a él? Di, también, cuál es la razón de semejanza en aquellos casos en los que los rectángulos sean semejantes.

a) 36 cm y 54 cm.
b) 10 cm y 15 cm.
c) 12 cm y 20 cm.
d) 45 cm y 70 cm.

PROBLEMA 1.4:

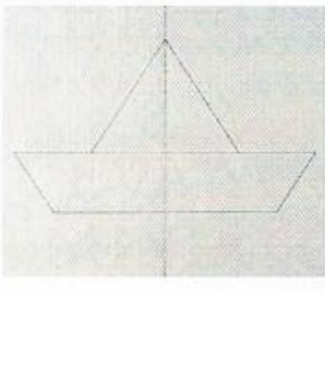
Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha. ¿Cuál ha sido la reducción?





PROBLEMA 1.5:

Esta copia mide 33 mm de alto y 39 mm de ancho. Calcula las dimensiones del original sabiendo que la ampliación de la fotocopia es de 150%.

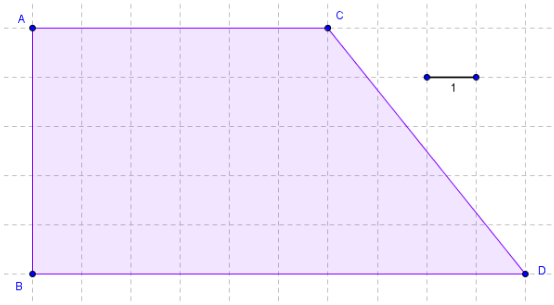


Campo 2: Razón de longitudes y áreas.

En este campo de problemas se van a proponer problemas sobre la razón de longitudes y áreas.

PROBLEMA 2.1:

Dado el cuadrilátero de la figura:



a) Halla la medida de sus cuatro lados.
b) Halla su perímetro.
c) Dibuja un cuadrilátero de 44 centímetros de perímetro y semejante al anterior.

PROBLEMA 2.2:

Dos polígonos semejantes tienen una razón de semejanza igual a 0,5. Si el perímetro del menor de ellos es 40 cm, ¿cuál es el perímetro del otro?

PROBLEMA 2.3:

Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su área mida 135 centímetros cuadrados.

PROBLEMA 2.4:

Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero, sabiendo que el perímetro del segundo triángulo semejante a él es de 18 cm y que la razón entre las áreas de dichos triángulos es $\frac{9}{16}$.

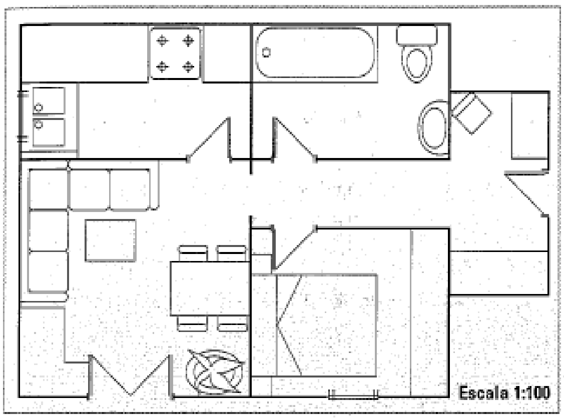
Campo 3a: Escalas. Distancias y áreas en un mapa.

En este campo de problemas se van a proponer problemas de distancias y áreas en un mapa para poder trabajar las escalas. Hay ejercicios de escalas de reducción, de escalas de ampliación, y de encontrar la escala a la que está representada una distancia. Además hay escalas en áreas.

PROBLEMA 3a.1:

Mide el plano y completa la tabla.

	Dimensiones en el plano	Dimensiones reales
Salón		
Dormitorio		
Cocina		
Baño		



PROBLEMA 3a.2:

Di que tipo de escala (ampliación, reducción o escala natural) usarías para representar los siguientes objetos en un folio:

a) Botón.
b) Distancia entre dos ciudades.
c) Boceto de una habitación.
d) Tornillo.
e) Grapadora.
f) Una persona

PROBLEMA 3a.3:

En un mapa se indica que la escala es 1:25000. ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la representada? Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de 15,5 centímetros, ¿cuál será la distancia real que las separa? Da el resultado en kilómetros.

PROBLEMA 3a.4:

La distancia entre dos ciudades es de 350 kilómetros y la distancia que las separa en un mapa es de 7 centímetros. ¿Cuál es la escala de dicho mapa?

PROBLEMA 3a.5:

Un botón mide 1 cm de diámetro. Lo queremos representar en un folio, y para ello dibujamos un diámetro de 15 cm. ¿Cuál será la escala empleada para dibujar dicho botón?

PROBLEMA 3a.6:

En el plano de un piso realizado a escala 1:100, ¿cuál será la superficie del salón si en la realidad tiene 30 m^2?

PROBLEMA 3a.7:

Una habitación está representada a escala 1:50. Si su superficie en la realidad es de 10 m^2, ¿cuál será su superficie en el plano?

Campo 3b: Escalas. Distintas formas de expresar la escala.

En este campo de problemas se van a proponer problemas de las diferentes formas de expresar las escalas.

PROBLEMA 3b.1:

Relacionada cada una de las escalas dadas en forma gráfica con cada una de las escalas dadas mediante una proporción numérica:

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

a) 1:500 000

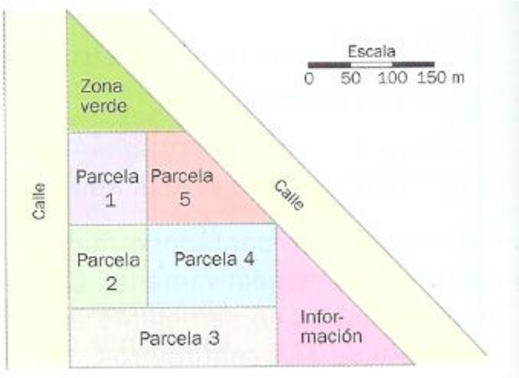
b) 1:500

c) 1:1 200 000

d) 1:1 200

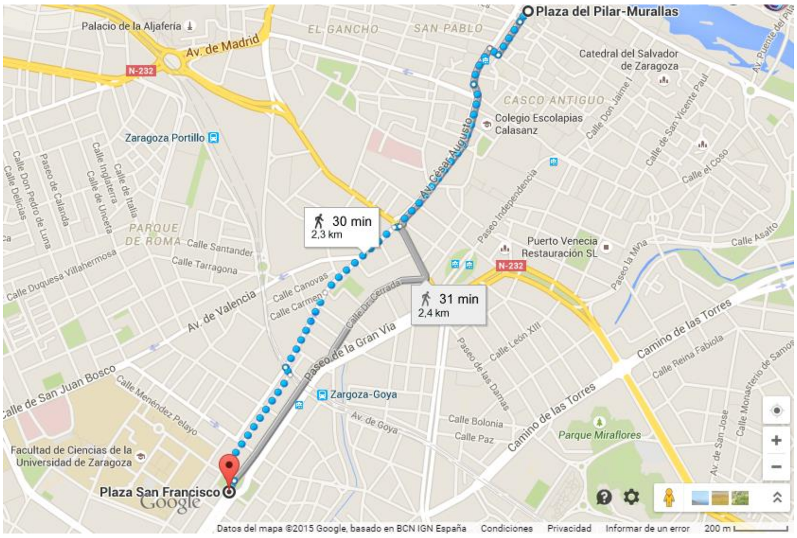
PROBLEMA 3b.2:

El siguiente problema representa un proyecto de un nuevo polígono industrial. Obtén las dimensiones y al área de cada parcela.



PROBLEMA 3b.3:

Dos amigos quieren ir de la Plaza San Francisco a la Plaza del Pilar. Han buscado en Google Maps la ruta a seguir, y le sale la siguiente imagen, con la escala correspondiente indicada abajo. Calcula el área de la Universidad de Zaragoza a partir del mapa.



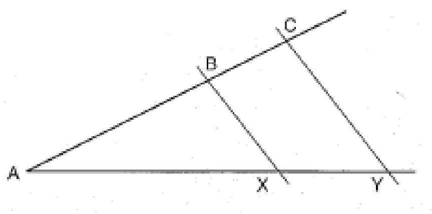
Campo 4: Semejanza de triángulos. Teorema de Tales. Triángulo en posición de Tales.

En este campo de problemas se van a proponer problemas sobre semejanza de triángulos, y sobre la aplicación del teorema de Tales.

PROBLEMA 4.1:

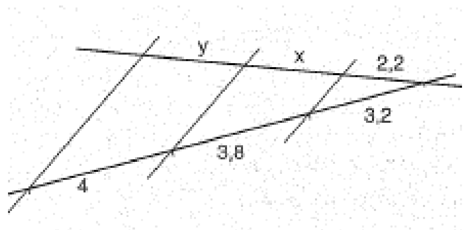
Determina la longitud del segmento XY de la figura sabiendo que:

AB = 1,8 cm; BC = 1 cm; AX = 2,7 cm.



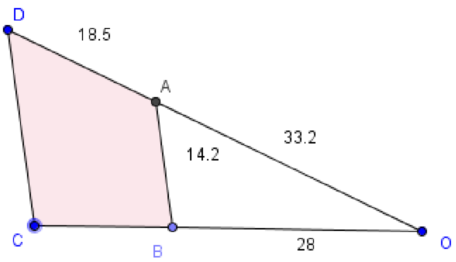
PROBLEMA 4.2:

Completa las medidas que faltan en la figura.



PROBLEMA 4.3:

En la siguiente figura, halla las longitudes de los lados BC y CD:



Campo 5: División de segmentos en partes iguales y en partes proporcionales.

En este campo de problemas se van a proponer problemas para trabajar la división de segmentos en partes iguales y en partes proporcionales.

PROBLEMA 5.1:

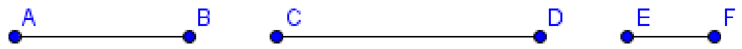
Dibuja un segmento AB de 3 cm de longitud y divídelo en cuatro partes iguales.

PROBLEMA 5.2:

Juan y Luisa quieren repartirse 20 metros de cable eléctrico en partes proporcionales a 4 y 8. ¿Cuántos metros le tocarán a cada uno? Divídelo mediante la división de un segmento en partes proporcionales.

PROBLEMA 5.3:

Divide el segmento AB de 6 cm en partes proporcionales a los segmentos siguientes.

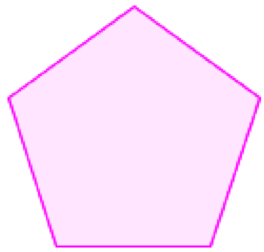


Campo 6: Construcción de polígonos semejantes.

En este campo de problemas se van a proponer problemas sobre construcción de polígonos semejantes mediante homotecia.

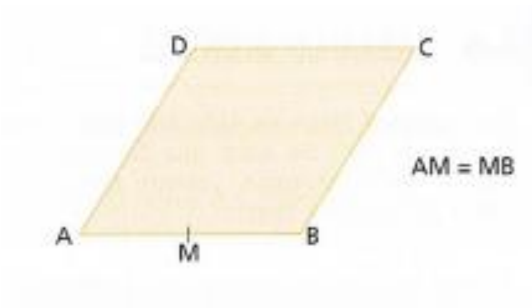
PROBLEMA 6.1:

Construir un pentágono semejante a ABCDE siendo la escala 2:1



PROBLEMA 6.2:

La figura siguiente es un rombo. Tomando como vértice de los triángulos de Tales el punto A, construye un rombo de lado mitad.



PROBLEMA 6.3:

Construye un hexágono regular de 6 cm de lado. ¿Cuál es el lado de otro hexágono semejante, si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{5}$?

Campo 7: Criterios para determinar la semejanza de triángulos.

En este campo de problemas se van a proponer problemas para trabajar los criterios de la semejanza de triángulos.

PROBLEMA 7.1:

Comprueba si son semejantes las parejas de triángulos.

a) $\hat{A}$ = 43º, $\hat{C}$ = 81º

$\widehat{A'}$ = 43º, $\widehat{B'}$ = 56º

b) a$= 10,\ b = 20,\ c = 30$

$a' = 20,\ b' = 30,\ c' = 50$

c) $\hat{A}$ = 30º, $b = 3,\ c = 5$

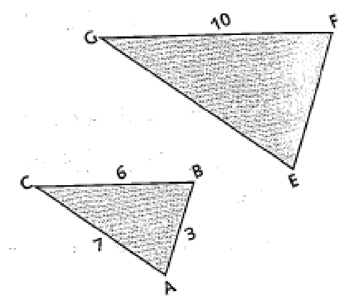
$\hat{A}'$ = 30º, $b' = 6,\ c' = 10$

d) $\hat{A}$ = 45º, $b = 2,\ c = 7$

$\hat{A}'$ = 45º, $b' = 4,\ c' = 5$

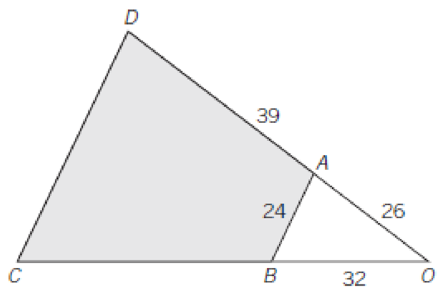
PROBLEMA 7.2:

Los dos triángulos de la figura son semejantes. Calcula el valor de los lados desconocidos:



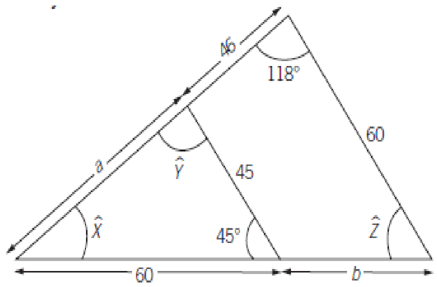
PROBLEMA 7.3:

El jardín de la figura tiene la forma del cuadrilátero ABCD, con sus lados AB y CD paralelos. Calcula lo que miden los lados BC y CD.



PROBLEMA 7.4:

Halla los valores de los ángulos $\hat{X}, \hat{Y}$, $\hat{Z}$, y de los lados a y b de la siguiente figura:



Campo 8: Calcular distancias inaccesibles.

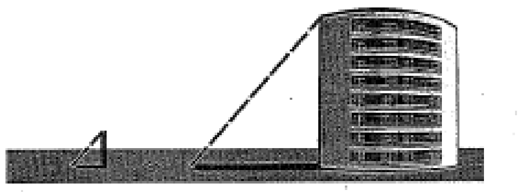
En este campo de problemas se van a proponer problemas para trabajar el cálculo de distancias inaccesibles.

PROBLEMA 8.1:

Un árbol de 3 metros de altura da una sombra de 1,2 metros. ¿Cuál es la altura de un monumento cuya sombra es de 4 metros?

PROBLEMA 8.2:

Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una estaca de 2 m arroja una sombra de 1,25 m.

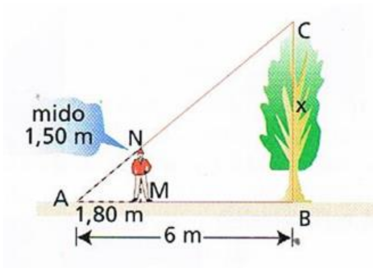


PROBLEMA 8.3:

Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. El árbol pequeño mide 2,5 m. ¿Cuánto miden los demás?

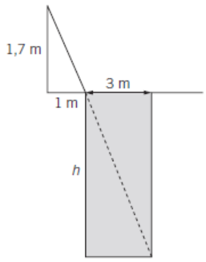
PROBLEMA 8.4:

¿Cuánto mide la altura del árbol?



PROBLEMA 8.5:

Determina la profundidad de una piscina que mide 3 metros de ancho, sabiendo que una persona que mide 1,7 metros de altura, y está situada a 1 metro del borde, visualiza la esquina inferior de la piscina.



En cuanto a la metodología propuesta para los campos de problemas, será una metodología en la que los alumnos intentarán resolver los problemas. Para la resolución de los problemas, los alumnos trabajarán en grupos de 2-3 personas para que trabajando en equipos sean capaces de dar posibles ideas para la resolución. Además el docente examinará el trabajo de los alumnos, y les ayudará en sus razonamientos, indicándoles el camino que pueden tomar. Cuando hayan trabajado un tiempo cada campo de problemas, el profesor les dará alguna pista para que puedan resolver los problemas aquellos alumnos que no los han logrado resolverlos, y les volverá a dejar un tiempo para que trabajen en ellos. Finalmente, entre todos se comentarán las soluciones encontradas para la resolución de los problemas, y el camino que han seguido. Así el profesor podrá institucionalizar las técnicas necesarias para resolver cada campo de problemas.

F. Sobre las técnicas y las tecnologías

A continuación muestro las técnicas que se ejercitan con cada campo de problemas propuesto. Además, se explica algunas de las tecnologías más importantes de cada campo de problemas.

- Campo 1: Figuras semejantes. Razón de semejanza.

  La técnica que se emplea para calcular la razón de semejanza es una proporción entre segmentos. Así, por ejemplo, para calcular si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, se igualan las proporciones: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$ y dichas proporciones tiene que dar el mismo cociente, que es la razón de semejanza. Si el cociente de las proporciones no es el mismo, las figuras no son semejantes. Para calcular un lado, dadas dos figuras semejantes, se forma la igualdad de las proporciones mencionadas, y se utiliza la regla de los productos cruzados con el fin de despejas la incógnita para obtener el lado desconocido.

  La tecnología que sustenta dicha técnica es la propia definición de figuras semejantes: dos figuras son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo k, llamado razón de semejanza.

- Campo 2: Razón de longitudes y áreas.

  La técnica que se emplea para este campo de problemas es formar la proporción, mediante el cociente de los perímetros o de las áreas para calcular la razón de los perímetros o de las áreas, y aplicar las técnicas de figuras semejantes explicadas anteriormente.

  La tecnología que sustenta dicha técnica son las propias definiciones de razón de longitud y de áreas. Las definiciones son las siguientes:

  Razón de longitudes: en dos figuras semejantes, la razón de los perímetros coincide con la razón de semejanza.

  Razón de las áreas: en dos figuras semejantes, la razón de las áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

- Campo 3: Escalas. Distancias y áreas en un mapa.

  En este campo de problemas, las técnicas que se usan son proporcionalidad numérica, donde se puede relacionar dos magnitudes, que son las medidas en el dibujo y en la realidad. Así, se resuelven mediante proporcionalidad directa, formando la proporción. También se pueden por el método de reducción a la unidad, que es un conocimiento previo de los alumnos.

  La tecnología que está detrás de las técnicas mencionadas son las propias definiciones de escalas y de los diferentes tipos de escalas que hay.

  Escalas: la escala de una representación es el cociente entre las longitudes en el dibujo y en la realidad (la razón de semejanza).

$$\mathrm{E} = \frac{Distancia\ en\ el\ dibujo}{Distancia\ en\ la\ realidad}$$

  De la misma manera, se puede hacer representaciones a escalas de áreas:

$$E^2 = \frac{Área\ en\ el\ dibujo}{Área\ en\ la\ realidad}$$

  Tipos de escalas: para representar un objeto, se puede dibujar figuras semejantes a las originales, más grandes, más pequeñas o invariantes; es decir, con las mismas medidas. Así, hay tres tipos de escalas numéricas:

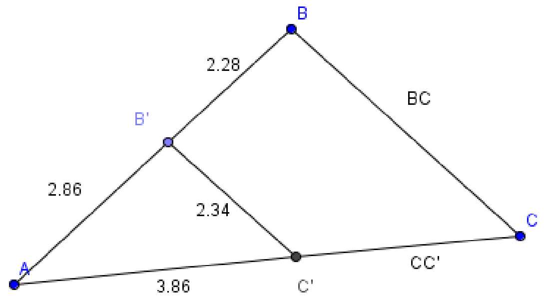
  - Escala de ampliación: es de la forma x:1.
  - Escala de reducción: es de la forma 1:x.
  - Escala natural: es de la forma 1:1.

  También existen las escalas gráficas, donde se marca lo que mide en la realidad cada trozo de ese tamaño en el mapa. Las escalas gráficas son de la siguiente forma:

- Campo 4: Semejanza de triángulos. Teorema de Tales. Triángulo en posición de Tales.

  Las técnicas que se usan para revolver los ejercicios en los que hay que aplicar el teorema de Tales para encontrar la medida de un lago es la aplicación de proporciones para determinar los lados.

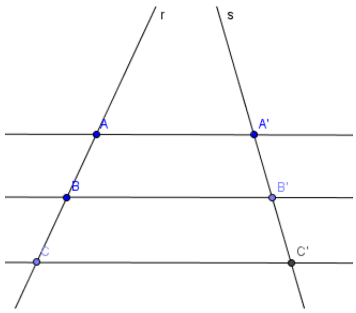
  Así, en los ejercicios que están en posición de Tales, del tipo:



la técnica que se usa es formar la igualdad entre las proporciones $\frac{AB'}{AC} = \frac{B'B}{C'C}$ para calcular el lado CC' y se forma la igualdad entre las proporciones $\frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$ para calcular el lado BC.

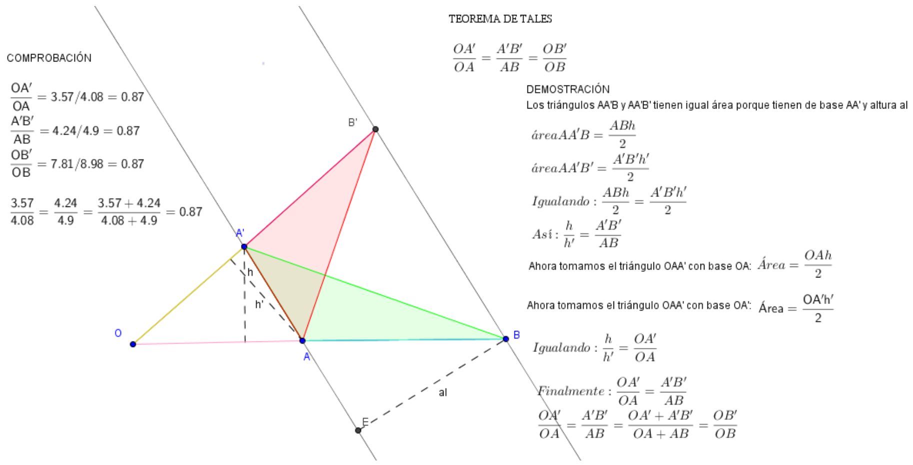
La tecnología para este campo de problemas es la teoría; es decir, el teorema de Tales, y el triángulo en posición de Tales. Además, también se demostrará el teorema de Tales.

Teorema de Tales: si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes r y s, los segmentos que se forman sobra la recta r son proporcionales a los segmentos formados sobre s.

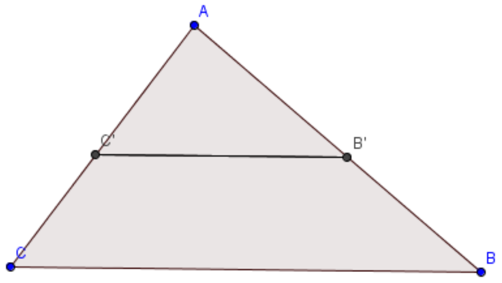


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

La demostración del teorema de Tales es la siguiente:



Triángulo en posición de Tales: dos triángulos están en posición de Tales cuando tienen un vértice común y los lados opuestos a ese vértice son paralelos.



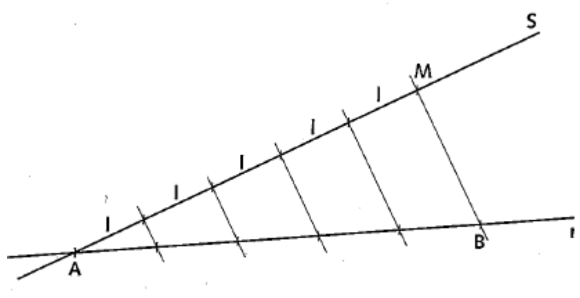
- Campo 5: División de segmentos en partes iguales y en partes proporcionales.

  La técnica que se usa para la resolución de este campo de problemas es el procedimiento siguiente:

  División de un segmento en partes iguales a partir del teorema de Tales:

  Si tenemos que dividir el segmento AB en partes iguales procedemos de la siguiente forma:

  - Trazamos una recta r y marcamos el segmento AB.
  - Trazamos una recta s y marcamos tantos segmentos consecutivos iguales como partes iguales queremos obtener del segmento AB.
  - Unimos el extremo M de la última división con B.
  - Trazamos paralelas a MB por los extremos de los segmentos que hemos marcado en la recta s.

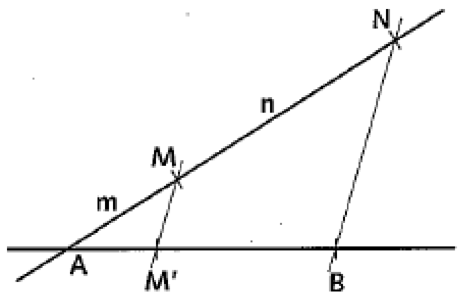


  División de un segmento en partes proporcionales a partir del teorema de Tales:

  Si tenemos que dividir el segmento AB en partes proporcionales procedemos de la siguiente forma:

  - Trazamos una recta r y marcamos el segmento AB.
  - Trazamos una recta s y marcamos los segmentos proporcionales consecutivos que queremos obtener del segmento AB.

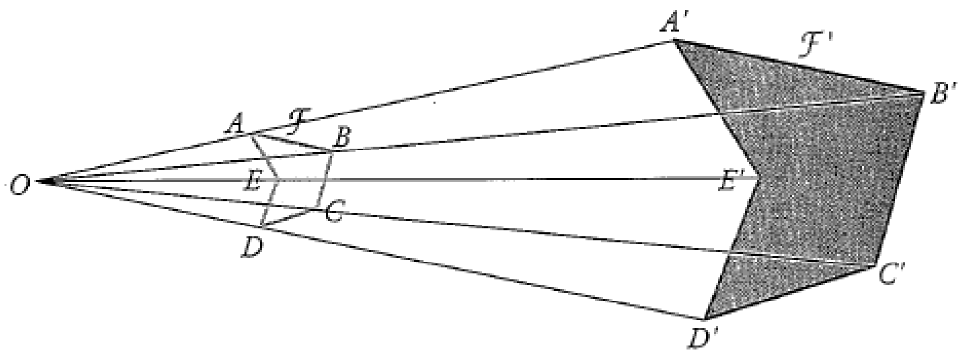
- Unimos el extremo M de la última división con B.
- Trazamos paralelas a MB por los extremos de los segmentos que hemos marcado en la recta s.



La tecnología que está detrás de esta técnica es el teorema de Tales, que ya se ha mencionado.

- Campo 6: Construcción de polígonos semejantes.

  La técnica para la construcción de polígonos semejantes por homotecia es la siguiente: Si queremos ampliar la figura F al triple de su tamaño, tomamos un punto O cualquiera. Trazamos rayos que pasen por O y por los vértices de la figura F, y obtenemos los puntos correspondientes a una distancia triple. Se obtiene así la figura semejante F', con razón de semejanza 3. Los segmentos de F' son paralelos a los correspondientes de F.



Las tecnologías para la construcción de polígonos semejantes por homotecia son las propias definiciones de semejanza de polígonos y homotecia, que son las siguientes:

Semejanza de polígonos: dos polígonos son semejantes cuando sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados proporcionales.

Homotecia: Una homotecia es una transformación afín que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor. En general una homotecia de razón k diferente de 1 deja un único punto fijo, llamado centro. El centro de homotecia es el punto en el que concurren las rectas que determinan los puntos de una figura y sus correspondientes homólogos. La razón de homotecia se calcula hallando el cociente entre OA y OA', siendo A un punto cualquiera.

- Campo 7: Criterios para determinar la semejanza de triángulos.

La técnica para la resolución de este campo de problemas es la aplicación de los criterios de semejanza. Para comprobar si se cumple que los lados son iguales en triángulos semejantes, se comprueba los ángulos, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Para contrastar si los lados son proporcionales, se usa la técnica explicada en el campo 1 de figuras semejantes.

La tecnología que está detrás de las técnicas para determinar la semejanza de triángulos son los criterios de semejanza de triángulos, que son los siguientes:

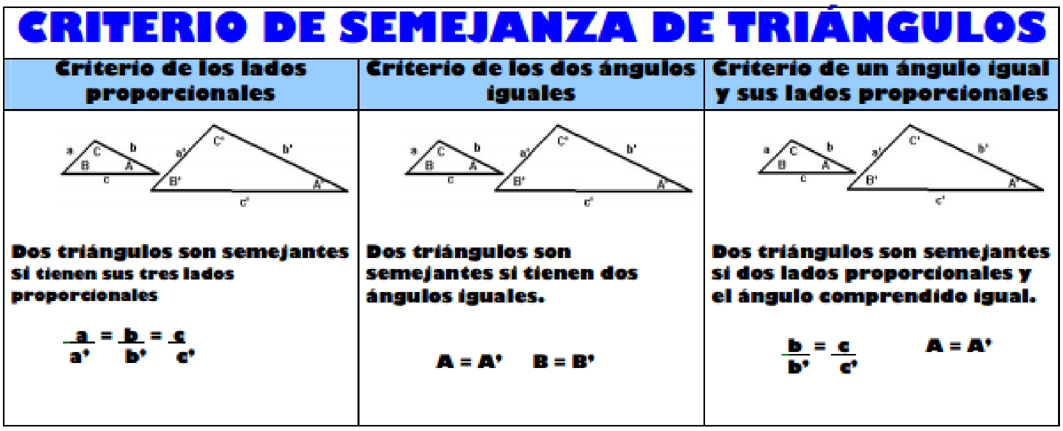
Criterios para determinar la semejanza de triángulos:

1º criterio: dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados de uno proporcionales a los del otro.

2º criterio: dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes iguales.

3º criterio: dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo correspondiente igual y los lados que lo forman proporcionales.

A continuación se muestra un esquema con el resumen de los criterios de semejanza:



CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS		
Criterio de los lados proporcionales	Criterio de los dos ángulos iguales	Criterio de un ángulo igual y sus lados proporcionales
Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales	Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.	Dos triángulos son semejantes si dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	$A = A'$ $B = B'$	$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ $A = A'$

- Campo 8: Calcular distancias inaccesibles.

  La técnica que se usa para el cálculo de distancias inaccesibles mediante sombras es formar los triángulos semejantes con la altura del objeto y la sombra, y establecer la relación de proporcionalidad entre los triángulos, de acuerdo a las proporciones entre los segmentos. Para obtener el dato desconocido se puede usar la regla de los productos cruzados.

  La tecnología que sustenta esta técnica es el teorema de Tales.

Todas las técnicas citadas están adecuadas al campo de problemas ya que estas técnicas sirven para la resolución de todos los problemas planteados.

Para las técnicas y tecnologías, hay diferentes metodologías que se proponen para la implementación en el aula. Las técnicas se van a justificar mediante diferentes razonamientos. Así algunas técnicas se justificarán mediante las propias definiciones del concepto a explicar.

Para las técnicas principales de la unidad didáctica la metodología que se plantea es una metodología basada en el trabajo autónomo. Los alumnos a partir del problema de razón de ser correspondiente a estas técnicas, se encontrarán con el momento del primer encuentro, en el que verán que hay que abordar una nueva praxeología matemática. Luego pasarán al momento exploratorio, en que se pretende que el alumno reconozca algunos conceptos de la teoría. Tendrán un momento de constitución del entorno tecnológico-teórico y un momento de trabajo de la técnica donde los alumnos harán modificaciones de las técnicas iniciales. Por último, el profesor será el encargado del momento de institucionalización, en el que dicho concepto se incorporará al acervo cultural matemático de la clase.

Una forma de justificar las técnicas va a ser mediante la visualización de figuras, como es el caso del problema de razón de ser de las figuras semejantes, donde los alumnos mediante las figuras verán los conceptos de la semejanza. Esto mismo ocurrirá también con la división de segmentos en partes iguales y en partes proporcionales, y con la construcción de polígonos semejantes. En estos campos de problemas, la justificación quedará determinada por la propia visualización de las figuras, y mediante medición. En el problema de razón de ser de las escalas les ayudará a hacer un razonamiento de la técnica, que luego tendrán que formalizarlo.

También se justificarán algunas técnicas mediante cálculos, donde los alumnos van a ser capaces de sacar las conclusiones. En este sentido, para la razón de longitudes y áreas, los alumnos serán capaces de enunciar las razones de los perímetros y áreas mediante el problema de razón de ser de este concepto, y haciendo los cálculos correspondientes.

Para el teorema de Tales, el profesor les dará una demostración del teorema mediante la utilización de GeoGebra. Además, se les enseñará visualmente el teorema, y podrán comprobar que modificando los lados de los triángulos, obteniendo otros triángulos semejantes, se sigue verificando la igualdad. Así podrán concluir que el teorema es cierto, cualesquiera que sean los triángulos semejantes que cumplen las hipótesis del enunciado del Teorema de Tales.

Para las técnicas de división de segmentos en partes iguales y en partes proporcionales, y la construcción de polígonos semejantes, el profesor tomará el control de la clase, explicando las técnicas necesarias para estos conceptos.

Para los criterios para determinar la semejanza de triángulos, se pretende que el alumno sea capaz de sacar los criterios a partir de ejemplos. Se les propondrá a los alumnos varios ejercicios para que ellos sean capaces de deducir los criterios, y vean que no es necesario verificar todas las condiciones. Así, por ejemplo para comprobar que los ángulos son iguales en un triángulo semejante, los alumnos comprobarán los tres lados, y luego se darán cuenta que como la suma de los ángulos interiores de un triángulo son 180º, no es necesario verificar los tres ángulos, porque con verificar dos ángulos, y saber que son triángulos, el tercero es obvio. Con el resto de los criterios pasará lo mismo, y los alumnos serán los encargados de encontrar los criterios de semejanza. Finalmente, el profesor será el encargado de formalizar los criterios y llevar a cabo el momento de institucionalización.

Para el cálculo de distancias inaccesibles mediante sombras, se les propondrá el problema de razón de ser propuesto de cálculo de la torre del Pilar. Los alumnos intentarán buscar soluciones para hallar la torre. Finalmente, se les explicará mediante la historia, el método de comparación de sombras que Tales utilizó para medir la altura de las pirámides egipcias.

G. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

La unidad didáctica de la semejanza está prevista para una duración de 10 sesiones, en la que incluimos la sesión de conocimientos previos, y la sesión de la evaluación de los contenidos expuestos. Además se incluye una última sesión en la que se darán las notas de los exámenes correspondientes y se corregirá el examen para que los alumnos puedan ver sus fallos.

A continuación voy a pasar a poner la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores:

SESIÓN 1

En la primera sesión se comprobará los conocimientos que tienen los alumnos en los conocimientos que son necesarios para afrontar el tema de la semejanza. Así, se resolverán los ejercicios propuestos en el apartado de conocimientos previos. Como ya se ha expuesto en el apartado de conocimientos previos, esta actividad la realizarán en parejas, para que se puedan ayudar entre ellos y cuando acaben cada ejercicio, se realizará una corrección del ejercicio, saliendo los alumnos a corregirlo a la pizarra.

SESIÓN 2

En la segunda sesión se realizará el problema 1 de razón de ser de las figuras semejantes. La idea de este ejercicio es que los alumnos intenten contestar a las preguntas que se plantean en el ejercicio, y abrir un debate en clase con las preguntas que se plantean, ya que algunas preguntas son ambiguas. Además, pretendemos que los alumnos sepan reconocer figuras semejantes, de las que no lo son.

Una vez acabado el problema de razón de ser, se les explicará la diferencia entre igualdad y semejanza, y se les explicará que no usen el término “parecido” para expresar la igualdad o la semejanza.

En la segunda parte de la sesión, se les dejará tiempo para la realización de los problemas del campo de problemas 1 de figuras semejantes, razón de semejanza, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas. Se prestará especial atención a los problemas 1.1., el apartado a), 1.2 y 1.4.

Para acabar, una vez realizado este campo de problemas, los alumnos ya habrán visto figuras semejantes, y así ya se les podrá explicar la razón de semejanza en las figuras semejantes, institucionalizando las técnicas necesarias.

SESIÓN 3

En la tercera sesión se darán los conocimientos de razón de perímetros y áreas. Para ello, primero se realizará el problema 2 de razón de ser de la relación entre el perímetro y al área de figuras semejantes. La idea de este problema es que los alumnos saquen las conclusiones por ellos mismos, mediante las preguntas que se plantean en el problema para poder guiarles en sus razonamientos. Así, una vez calculado estos datos, les pediré que hagan el cociente entre los perímetros de la segunda figura y la primera figura, y lo mismo con las áreas. Ahora sabemos que la razón de semejanza entre las dos figuras es $k = \frac{1}{4}$. La idea es que con estos datos encuentren alguna relación entre los resultados obtenidos de ambos cocientes con la razón de semejanza. Es fácil ver que la razón de semejanza coincide con la razón entre los perímetros, y la razón de las áreas coincide con el cuadrado de la razón de semejanza. A continuación, el profesor será el encargado del momento de institucionalización, generalizando estos resultados.

En la segunda parte de la sesión, se les dejará tiempo para la realización de los problemas del campo de problemas 2 de razón de perímetros y áreas, razón de semejanza, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas. Se prestará especial atención al problema 2.4. Se escoge este problema de todos los que hay en este campo de problemas porque es el más completo ya que mezcla las razones de los perímetros y las áreas.

Para acabar, una vez realizado este campo de problemas, y comentado los problemas propuestos, el profesor institucionalizará las técnicas necesarias.

SESIÓN 4

En la cuarta sesión se darán los conocimientos de escalas. Para ello, primero se realizará el problema 3 de razón de ser de las escalas. La idea de este problema es que los alumnos sin tener conocimientos previos en este campo, sepan qué muebles pueden entrarles en la habitación y cuáles no. Así, los alumnos tendrán que diseñar una estrategia para averiguar qué muebles pueden comprar, y cuál será la disposición de ellos en la habitación. Terminado este ejercicio, los alumnos ya tendrán un concepto más claro de escalas.

En la segunda parte de la sesión, se les dejará tiempo para la realización de los problemas del campo de problemas 3a de escalas, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas. Se prestará especial atención a los problemas 3a.3, 3a.4 y 3a.7.

Para acabar, una vez realizado este campo de problemas, y comentado los problemas propuestos, el profesor les explicará la definición de escalas y los diferentes tipos de escalas que existen. También se les explicará la relación de las escalas y las áreas.

SESIÓN 5

En la quinta sesión se explicará la segunda parte de las escalas, que son las distintas formas de expresar las escalas. A parte de la escala numérica, que es la que se explica en la anterior sesión, también las escalas se pueden expresar con la escala gráfica.

Primero se les dejará a los alumnos que intenten resolver el problema 3b.3 para que los alumnos piensen cómo pueden resolver el problema con los conocimientos que tienen.

En la segunda parte de la sesión, se les dejará tiempo para la realización del problema 3b.1 del campo de problemas 3b de escalas, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas.

Se explicará que este tipo de escala tiene algunas ventajas respecto a la otra escala, porque si modificas el tamaño del mapa, la escala no cambia porque está en el propio mapa. Sin embargo, esto no pasa con la escala numérica, ya que si deformas el mapa, la escala numérica debería cambiar.

SESIÓN 6

En la sexta sesión se darán los contenidos de la semejanza de triángulos, teorema de Tales y triángulo en posición de Tales.

En esta sesión se les explicará que los triángulos pueden guardar proporcionalidad también, y que estas figuras son muy importantes. Para introducirles la semejanza entre triángulos se realizará una actividad en la que necesitarán cartabón y regla. La actividad consiste en medir los lados de los triángulos exteriores e interiores del cartabón, y hacer el cociente de ambos. Así verán que el cociente de todos los lados exteriores e interiores de los triángulos es el mismo. Además, todos los cartabones de la clase tienen la misma razón de semejanza, por lo que a toda la clase le tiene que salir el mismo cociente.

Cuando hayan comprobado estas relaciones, se les explicará que esto pasa porque los triángulos son semejantes, y por eso el cociente es el mismo, que es la razón de semejanza. Así se les explicará las condiciones que tienen que cumplir los triángulos para que sean semejantes.

A continuación se les propondrá el siguiente juego que introduce Tales: *"Para dibujar un triángulo se necesitan tres segmentos. ¿Serías capaz de dibujar dos triángulos utilizando tan solo 4 segmentos?"* La mayoría de los alumnos harán un triángulo, y luego un segmento cortando a uno de los vértices. Por ello, cuando hagan eso, se les pedirá que ahora realicen el juego sin cortar ningún vértice. La idea es que los alumnos dibujen los triángulos en posición de Tales. A partir de este juego, se les explicará que esto es conocido como el Teorema de Tales.

En la segunda parte de la sesión, se les dejará tiempo para la realización de los problemas del campo de problemas 4 de semejanza de triángulos, teorema de Tales, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas. Se prestará especial atención al problema 4.3.

Para acabar, una vez realizado este campo de problemas, y comentado los problemas propuestos, el profesor les dará el enunciado del teorema de Tales, e institucionalizará las técnicas necesarias para la resolución de los problemas.

SESIÓN 7

Me parece importante usar el GeoGebra para la explicación del Teorema de Tales, por lo que será conveniente usar esta sesión para ir a la sala de informática.

Primero se les pedirá a los alumnos que usen GeoGebra para formar dos triángulos en posición de Tales, y que comprueben a modificar los lados, manteniendo las condiciones del teorema de Tales, para comprobar que se cumple dicho teorema.

A continuación, el profesor les mostrará la demostración y la comprobación del teorema mediante el archivo de GeoGebra que está descrito anteriormente.

Para acabar la sesión, se les dejará a los alumnos que resuelvan algunos de los ejercicios planteados en el campo de problemas de 4 con GeoGebra, y así podrán comprobar la solución de los ejercicios que habían resuelto en la anterior sesión.

SESIÓN 8

En la octava sesión se explicarán los contenidos de división de segmentos en partes iguales o en partes proporcionales, y la construcción de polígonos.

En la primera parte de la sesión se explicará la división de segmentos en partes iguales y en partes proporcionales. Para ello, primero se les dejará tiempo para la realización de los problemas del campo de problemas 5 de división de segmentos, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas. Una vez realizado este campo de problemas, y comentado los problemas propuestos, el profesor les explicará las técnicas a seguir para la resolución de este campo de problemas.

En la segunda mitad de la sesión se les explicará la construcción de polígonos semejantes. Primero se les dejará tiempo para la realización de los problemas del campo de problemas 6 de construcción de figuras semejantes, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas. Una vez realizado este campo de problemas, y comentado los problemas propuestos, el profesor les explicará las técnicas necesarias para la resolución de este campo de problemas.

Además se les recordará que en la primera sesión también construyeron figuras semejantes mediante la cuadrícula, y éste es otro método de construcción de figuras semejantes, que es mediante homotecia.

SESIÓN 9

En la novena sesión se darán los contenidos de criterios de semejanza de triángulos.

Para los criterios de semejanza se les propondrá a los alumnos los problemas del campo de problemas 7 de los criterios de semejanza de triángulos, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas. Se prestará especial atención al problema 7.1, los apartados a) y b) y el problema 7.4. A través de estos problemas se pretende que los alumnos sean capaces de deducir los criterios, y vean que no es necesario verificar todas las condiciones de semejanza de triángulos. Así, por ejemplo para comprobar que los ángulos son iguales en un triángulo semejante, los alumnos comprobarán los tres lados, y luego se darán cuenta que como la suma de los ángulos interiores de un triángulo son 180º, no es necesario verificar los tres ángulos, porque con verificar dos ángulos, y saber que son triángulos, el tercero es obvio. Con el resto de los criterios pasará lo mismo, y los alumnos serán los encargados de encontrar los criterios de semejanza. Finalmente, el profesor será el encargado de formalizar los criterios y llevar a cabo el momento de institucionalización.

SESIÓN 10

En la décima sesión se darán los contenidos de cálculo de medidas inaccesibles. Para ello, se realizará el problema de razón de ser de este contenido en el que les pregunta cómo podrían medir la altura de la torre del Pilar, mediante el conocimiento de unas sombras.

Una vez acabado el problema de razón de ser, el profesor institucionalizará el concepto mediante la historia del método de comparación de sombras que Tales utilizó para medir la altura de las pirámides egipcias.

En la segunda parte de la sesión, se les dejará tiempo para la realización de los problemas del campo de problemas 8 de cálculo de medidas inaccesibles, siguiendo la metodología planteada en el apartado E, sobre el campo de problemas.

Para acabar, una vez realizado este campo de problemas, y comentado los problemas propuestos, el profesor institucionalizará las técnicas necesarias.

SESIÓN 11

En la onceava sesión se hará la evaluación de los contenidos explicados durante la unidad didáctica de la semejanza.

SESIÓN 12

En la duodécima sesión se hará la corrección del examen realizado en la sesión anterior, y se dará los exámenes corregidos para que los alumnos vean los fallos que han tenido y entiendan los errores cometidos. Además se les pedirá a los alumnos una última tarea que consistirá en la resolución del examen, explicando todos los pasos que usan en cada ejercicio, y redactando el examen correctamente. Esta tarea la veo útil para que los alumnos aprendan a razonar matemáticamente.

A continuación se muestra un cuadro resumen de lo que se hará en cada sesión, detallando la duración de cada actividad:

SESIÓN	**ACTIVIDADES**	**DURACIÓN**
1	Conocimientos previos.	60 min.
2	Razón de ser figuras semejantes.	25 min.
	Campo de problemas 1: problemas 1.1.a), 1.2, 1.4.	25 min.
	Definición figuras semejantes. Razón de semejanza.	10 min.
3	Razón de ser de la razón de perímetros y áreas.	25 min.
	Campo de problemas 2: problema 2.4.	25 min.
	Institucionalización.	10 min.
4	Razón de ser de las escalas.	25 min.
	Campo de problemas 3a: problemas 3a.3, 3a.4, 3a.7.	25 min.
	Definición escala. Tipos de escalas numéricas.	10 min.
5	Problema 3b3.	25 min.
	Problema 3b.1.	25 min.
	Teoría escala gráfica.	10 min
6	Actividad del cartabón.	15 min.
	Explicación semejanza de triángulos.	5 min.
	Juego para introducir Tales.	5 min.
	Campo de problemas 4: problema 4.3.	20 min.

<table>
<tr><td></td><td>Teorema de Tales. Triángulo en posición de Tales.</td><td>15 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">7</td><td>Informática: Trabajo GeoGebra.</td><td>20 min.</td></tr>
<tr><td>Informática: Demostración y comprobación Tales.</td><td>20 min.</td></tr>
<tr><td>Informática: Ejercicios GeoGebra.</td><td>20 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">8</td><td>Campo de problemas 5.</td><td>20 min.</td></tr>
<tr><td>Explicación división de segmentos.</td><td>10 min.</td></tr>
<tr><td>Campo de problemas 6.</td><td>20 min.</td></tr>
<tr><td>Explicación construcción de polígonos. Homotecia.</td><td>10 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td>Campo de problemas 7: problema 7.1 a), b), 7.4.</td><td>45 min.</td></tr>
<tr><td>Institucionalización de los criterios de semejanza.</td><td>15 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">10</td><td>Razón de ser distancias inaccesibles.</td><td>20 min.</td></tr>
<tr><td>Institucionalización mediante historia.</td><td>10 min.</td></tr>
<tr><td>Campo de problemas 8: problema 8.1.</td><td>20 min.</td></tr>
<tr><td>Institucionalización de las técnicas.</td><td>10 min.</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Examen de evaluación de la semejanza.</td><td>60 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">12</td><td>Corrección del examen. Entrega de los exámenes.</td><td>30 min.</td></tr>
<tr><td>Tarea: resolver examen razonando matemáticamente.</td><td>30 min.</td></tr>
</table>

H. Sobre la evaluación

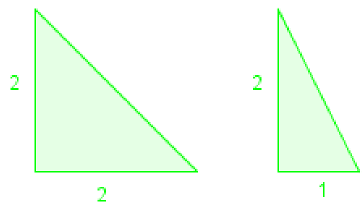
Para la evaluación de los conceptos aprendidos durante esta unidad didáctica se ha preparado una prueba escrita de una duración de 1 hora en la que los alumnos aplicarán los conceptos aprendidos y demostrarán sus conocimientos en el tema. En esta prueba se les dejará calculadora y regla para la realización de los problemas. Todas las preguntas valdrán lo mismo. Como hay 10 preguntas, cada pregunta valdrá 1 punto. A continuación se presenta la prueba escrita diseñada:

1.- Teorema de Tales. Enunciado y dibujo.

2.- Razona si las siguientes figuras son semejantes, y si lo son, calcula la razón de semejanza.

a)

b)



3.- El segmento determinado por dos puntos A y B de una figura mide 20 cm. El porcentaje de reducción de una fotocopiadora es 60%. Calcula la longitud del segmento A'B'.

4.- Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero, sabiendo que el perímetro del segundo triángulo equilátero, semejante al primero, es de 10 cm y que la razón entre las áreas de dichos triángulos es $\frac{4}{9}$.

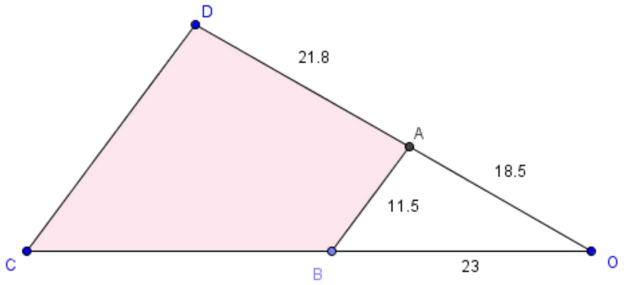
5.- Un mapa está hecho a escala 1:2.000.000.

a) ¿Qué distancia separa Lugo de Sevilla en el mapa, si en la realidad es de 849 km?

b) La distancia en el mapa entre Pamplona y Tarragona es 18,6 cm. ¿Cuál es la distancia real?

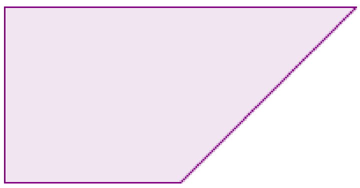
c) ¿A qué escala estaría representado un tornillo que tiene una altura de 10 mm, si al representarlo en una hoja, la altura del tornillo pasa a ser de 10 cm?

6.- El jardín de la figura tiene la forma del cuadrilátero ABCD, con sus lados AB y CD paralelos. Calcula lo que miden los lados BC y CD.

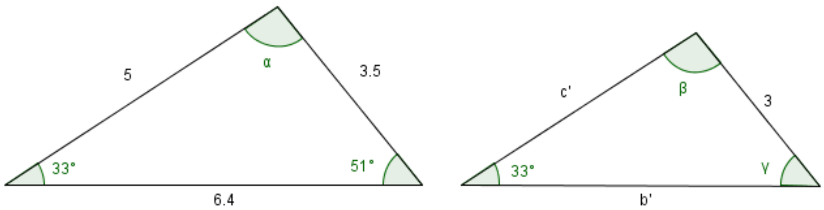


7.- Dividir un segmento de 10 cm en partes proporcionales a 3 cm y a 4 cm.

8.- Construye mediante el método de construcción de polígonos semejantes por homotecia, un cuadrilátero semejante a la figura con razón de semejanza $k = \frac{3}{2}$.



9.- Sabemos que los siguientes triángulos son semejantes. Halla los lados y los ángulos que faltan.



10.- Un padre y su hijo están esperando en la parada del autobús. La sombra del padre mide 1,2 m, y la del hijo 1,07 m. Sabiendo que el hijo mide 1,65 m, calcula la estatura del padre.

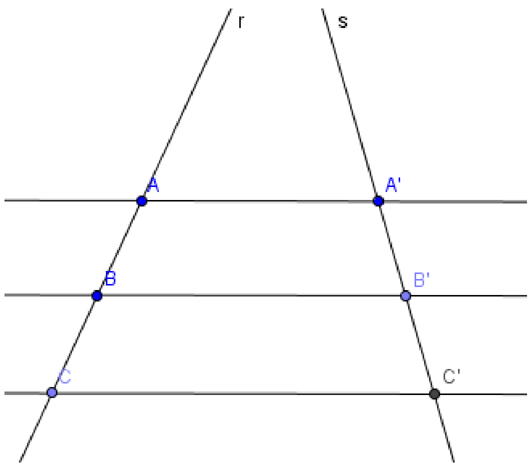
Una vez descrita la prueba escrita que se empleará para la evaluación de los conocimientos que han adquirido los alumnos, se pasa a comentar los aspectos que se pretenden evaluar con esta prueba escrita y las respuestas correctas y erróneas que se esperan de los alumnos. Además analizaremos los criterios de calificación que se van a emplear para la corrección de esta prueba.

PREGUNTA 1:

En esta pregunta se pretende que los alumnos estudien la teoría y sepan el enunciado del teorema de Tales, además de su posterior aplicación.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:

Teorema de Tales: si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes r y s, los segmentos que se forman sobra la recta r son proporcionales a los segmentos formados sobre s.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

En esta pregunta no se espera muchos errores de los alumnos porque suelen estudiarse la teoría de memoria, aunque no sepan lo que hacen. Sin embargo, se espera preguntas en blanco porque los alumnos no suelen ser capaces de estudiar teoría de matemáticas.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

50% si tiene bien el enunciado del teorema de Tales, ya que esta tarea se puede considerar la tarea principal de esta pregunta.

25 % si tiene bien el dibujo del teorema de Tales porque se consideraría una tarea auxiliar específica en esta pregunta.

25% si tiene bien la fórmula correspondiente del teorema de Tales porque se consideraría una tarea auxiliar específica en esta pregunta.

PREGUNTA 2:

En esta pregunta se pretende que los alumnos sean capaces de reconocer figuras semejantes. Además, si algunas de las figuras son semejantes se pide la razón de semejanza para saber si los alumnos saben calcular la razón de semejanza. Se pretende evaluar las técnicas asociadas al campo de problemas de figuras semejantes.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:

a) $\frac{0,75}{1} = \frac{1,5}{2} \Rightarrow$ Son semejantes con razón de semejanza $k = 0,75 = \frac{3}{4}$.

b) $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{2} \Rightarrow$ No son semejantes.

Esta pregunta es muy sencilla y se espera que casi todos los alumnos la hagan bien. Quizás puede haber algún fallo en sacar la razón de semejanza.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

50% cada apartado. Además en el apartado a) no bastará con que el alumno diga que son semejantes, y tendrá que decir la razón de semejanza para obtener la puntuación de la pregunta. Esta pregunta es muy corta y no considero que se pueda dar puntuaciones intermedias en esta pregunta.

PREGUNTA 3:

Con esta pregunta se pretende saber si los alumnos entienden la semejanza en problemas de la vida real. Las fotocopias dan su razón de semejanza mediante porcentajes, y se pretende que los alumnos entiendan la reducción o ampliación que les aplica una fotocopiadora cuando quieren hacer una copia de un dibujo. Esta pregunta también está asociada a las técnicas del campo de problemas de las figuras semejantes.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:

Porcentaje: 60% $\Rightarrow$ $k = 0,6$

$\frac{x}{20} = 0{,}6 \Rightarrow x = 20 \cdot 0{,}6 = 12$ cm

También se puede esperar que los alumnos la resuelvan mediante porcentajes o proporcionalidad de las siguientes maneras:

a) 60% de 20 = $\frac{60}{100} \cdot 20 = 12$ cm

b) Medidas $\xrightarrow{Directa}$ Porcentajes

20 $\longrightarrow$ 100%

x $\longrightarrow$ 60 %

Se forma la proporción:

$\frac{20}{x} = \frac{100}{60} \Rightarrow 20 \cdot 60 = 100 \cdot x \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 60}{100} = 12$ cm.

Los errores que se esperan de los alumnos es no interpretar bien el porcentaje de reducción, e interpretarlo como lo que se reducen la imagen, y por tanto, decir que la razón de semejanza es k=0,4.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

100 % si realiza bien el ejercicio.

Además se restará un 10% si se confunde en algún resultado al hacer cuentas ya que se puede considerar una tarea auxiliar general para este problema.

PREGUNTA 4:

Con esta pregunta se pretende evaluar a los alumnos sobre los conocimientos asociados al campo de problemas de razón de perímetros y áreas.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{9} = k^2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$\frac{P_2}{P_1} = k \Rightarrow \frac{10}{P_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$ cm es el perímetro del primer triángulo.

$l = \frac{P_1}{3} = 5$ cm mide el lado del primer triángulo equilátero.

En esta pregunta se espera muchos errores porque los alumnos no suelen diferenciar las razones de los perímetros y áreas. Así, el mayor error que se esperan de los alumnos es no diferenciar la razón de las áreas y de los perímetros y trabajar con $k = \frac{4}{9}$.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

25 % si sacan bien la razón de semejanza a partir de la razón entre las áreas porque se puede considerar una tarea auxiliar específica para esta pregunta.

50% si sacan bien la razón de semejanza y el perímetro del triángulo que se les pide áreas porque se puede considerar una tarea auxiliar específica para esta pregunta.

100 % si el alumno es capaz de contestar a lo que mide el lado del triángulo equilátero porque es la tarea principal de esta pregunta.

PREGUNTA 5:

Con esta pregunta se pretende evaluar a los alumnos sobre los conocimientos asociados al campo de problemas de las escalas. Se les propone varios apartados, en los que se les pide calcular distancias en el mapa y en la realidad. Además en el último apartado se les pide calcular la escala de ampliación porque se pretende que los alumnos entiendan también este tipo de escalas, y no se centren solo en las de reducción.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:

a) Distancia realidad: 849 km = 84900000 cm.

   ¿Distancia mapa?

   Distancia mapa $\xrightarrow{Directa}$ Distancia real

   1 ⟶ 2.000.000

   x ⟶ 8.490.0000

   Se forma la proporción:

   $\frac{1}{x} = \frac{2.000.000}{84.900.000} \Rightarrow 84900000 = 2000000 \cdot x \Rightarrow x = \frac{84900000}{2000000} = 42,45\ cm$

   separa Lugo de Sevilla en el mapa.

b) Distancia mapa: 18,6 cm.

   ¿Distancia realidad?

Distancia mapa $\xrightarrow{Directa}$ Distancia real

1 $\longrightarrow$ 2.000.000

18,6 $\longrightarrow$ x

Se forma la proporción:

$\frac{1}{18,6} = \frac{2.000.000}{x} \Rightarrow x = 18,6 \cdot 2000000 = 37200000$ cm = 372 km separa Pamplona y Tarragona en la realidad.

c) Altura tornillo realidad: 10 mm = 1 cm.

Altura tornillo dibujado: 10 cm.

E = $\frac{10}{1} \Rightarrow$ la escala es la escala de ampliación 10:1.

Los errores que se esperan de los alumnos en los apartados a) y b) son no entender la escala, y errores en el paso de cm a km. En el apartado c) se espera que los alumnos sean capaces de reconocer que es una escala de ampliación, pero no sepan expresarla bien y pongan la escala 1:10.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

$\frac{1}{3}$ cada apartado de esta pregunta.

Si el alumno se equivoca en el paso de cm a km en los apartados a) y b), se le reducirá un 25% del apartado porque se considera una tarea auxiliar específica para esta pregunta.

En el apartado c) si el alumno dice que es de ampliación, aunque la escala la ponga mal, se le pondrá un 25% de dicho apartado.

PREGUNTA 6:

Con esta pregunta se pretende evaluar a los alumnos sobre los conocimientos asociados al campo de problemas del teorema de Tales y su aplicación en el cálculo de los lados de los triángulos.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:

$$\frac{18,5}{23} = \frac{21,8}{x} \Rightarrow 18,5 \cdot x = 21,8 \cdot 23 \Rightarrow x = \frac{21,8 \cdot 23}{18,5} \Rightarrow x = 27,1 \text{ cm}$$

$$\frac{18,5}{11,5} = \frac{18,5+21,8}{y} = \frac{40,3}{y} \Rightarrow 18,5 \cdot y = 40,3 \cdot 11,5 \Rightarrow y = \frac{40,3 \cdot 11,5}{18,5} \Rightarrow y = 25,05 \text{ cm}$$

Los errores que se esperan de los alumnos son: no aplicar bien el teorema de Tales y no obtener bien los lados. Un error frecuente, es en el cálculo de la y, los alumnos aplicarán el teorema de Tales de la siguiente manera: $\frac{18,5}{11,5} = \frac{21,8}{y} \Rightarrow y = \frac{21,8 \cdot 11,5}{18,5} \Rightarrow y = 13,55$ porque cuando obtienes la x no hace falta sumar el lado del triángulo, y generalizan esto en la obtención de la y.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

$\frac{1}{2}$ de la puntuación cada lado que les piden calcular.

75% del lado si tienen bien la aplicación del teorema de Tales, poniendo bien las correspondientes fracciones ya que se considera la tarea principal de este apartado.

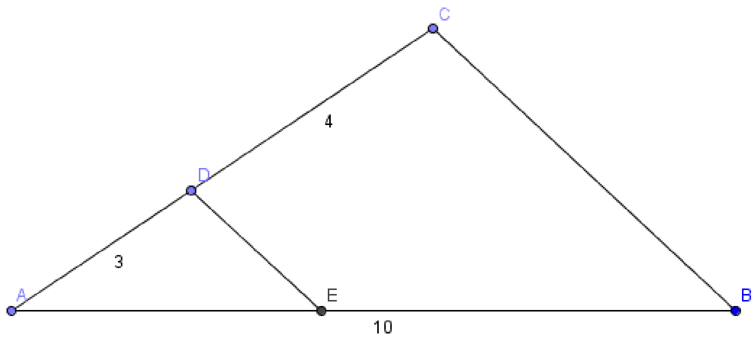
Se les restará un 25 % si se confunden en el despeje de la x, porque aunque no sea una tarea principal, es algo bastante importante en 2º ESO y se podría considerar una tarea auxiliar específica.

Se restará un 10% si tienen algún fallo de tipo aritmético.

PREGUNTA 7:

Con esta pregunta se pretende evaluar a los alumnos sobre los conocimientos asociados al campo de la división de los segmentos en partes proporcionales.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:



Los errores que se esperan de los alumnos son: no aplicar bien la división en partes proporcionales de un segmento, y no hacer rectas paralelas para la obtención de las divisiones del segmento de 10 cm.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

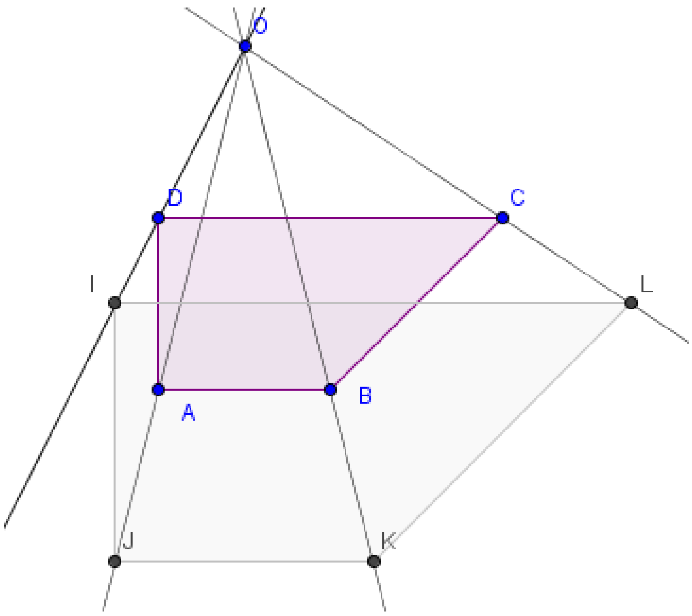
25 % si hacen bien el segmento de 10 cm, y hacen otro segmento de medidas 3 cm y 4 cm porque se puede considerar una tarea auxiliar específica para esta pregunta.

100% si además de lo anterior, tienen bien la unión de los puntos correspondientes, y hacen así bien la división del segmento en partes proporcionales porque esto es la tarea principal de esta pregunta.

PREGUNTA 8:

Con esta pregunta se pretende evaluar a los alumnos sobre los conocimientos asociados al campo de problemas de la construcción de polígonos semejantes por homotecia.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:



Los errores que se esperan de los alumnos son: no emplear bien la homotecia, no emplear bien la razón de semejanza, por lo que la figura semejante no guardará la razón de semejanza pedida.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

25% si ponen un punto exterior O y unen dicho punto con los vértices del cuadrilátero dado, porque se puede considerar una tarea auxiliar específica para esta pregunta.

50% si ponen bien la razón de semejanza, multiplicando el segmento de la unión del punto O con cada vértice, por la razón de semejanza dada porque se puede considerar la tarea principal de esta pregunta.

25% si unen cada vértice que han obtenido para obtener el cuadrilátero semejante al dado porque se puede considerar también una tarea auxiliar específica para esta pregunta.

PREGUNTA 9:

Con esta pregunta se pretende evaluar a los alumnos sobre los conocimientos asociados al campo de problemas de los criterios para determinar la semejanza de triángulos.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:

$\gamma = 51^{\circ}$

$\alpha = 180 - 33 - 51 = 96^{\circ}$

$\beta = 96^{\circ}$

$\frac{3}{3,5} = \frac{b'}{6,4} \Rightarrow 3,5 \cdot b' = 3 \cdot 6,4 \Rightarrow b' = \frac{3 \cdot 6,4}{3,5} = 5,5$ cm

$\frac{3}{3,5} = \frac{5}{c'} \Rightarrow 3 \cdot c' = 5 \cdot 3,5 \Rightarrow c' = \frac{5 \cdot 3,5}{3} = 5,8$ cm.

Los errores que se esperan de los alumnos son: errores en el cálculo de los lados proporcionales. Sin embargo, en los ángulos no se espera errores.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

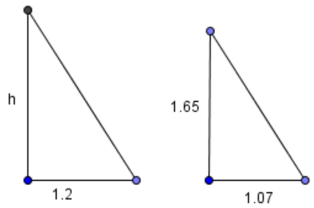
25% por cada ángulo que tengan bien, hasta un máximo del 50%.

25% por cada lado que tengan bien.

PREGUNTA 10:

Con esta pregunta se pretende evaluar a los alumnos sobre los conocimientos asociados al campo de problemas de cálculo de distancias inaccesibles.

La respuesta correcta que se espera de los alumnos es:



$\frac{x}{1,65} = \frac{1,2}{1,07} \Rightarrow 1,07 \cdot x = 1,65 \cdot 1,2 \Rightarrow x = \frac{1,65 \cdot 1,2}{1,07} = 1,85$ m es la estatura del padre.

Además este problema también se puede resolver con proporcionalidad.

Los errores que se esperan de los alumnos son: no aplicar bien el cálculo de medidas inaccesibles mediante las sombras. Además un error puede ser aplicar el teorema de Tales para calcular la altura, sumando las sombras.

Los criterios de calificación que se van a emplear en esta pregunta son:

75% si tienen el planteamiento del problema bien, y obtienen la ecuación a resolver del problema, ya que esto se considera la tarea principal de esta pregunta.

Se les restará un 25 % si se confunden en el despeje de la x, porque aunque no sea una tarea principal, es algo bastante importante en 2º ESO y se podría considerar una tarea auxiliar específica.

I. Sobre la bibliografía y páginas web

1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

LEGISLACIÓN

Orden de 9 se mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, Currículo aragonés de Educación Secundaria Obligatoria

Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón.

LIBROS DE TEXTO:

Editorial Edebé 1997 de Matemáticas para 2ºESO.

Editorial Vicens Vives 2003 de Matemáticas para 2ºESO.

Editorial SM 2004 de Matemáticas-Números para 2ºESO.

Editorial SM 2011 de Matemáticas-Pitágoras para 2º ESO.

BIBLIOGRAFIA:

GRUPO BETA (1990). Proporcionalidad geométrica y semejanza. Madrid. Editorial Síntesis.

BOYER, C.B. (2001). Historia de la matemática. Madrid. Alianza Editorial.

ESCUDERO, I. (2003). La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. SEIEM. Granada. 2003

GUALDRÓN, E., GUTIÉRREZ, A. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. SEIEM.

FERRER, M. (2013). Efectos de la actuación docente en la generalización de oportunidades de aprendizaje matemático.

WEBGRAFIA:

Amo las mates. Ejercicios matemáticas.

http://www.amolasmates.es/almacen/4eso_op_B/fichas_4eso_opB/6-Semejanza.pdf

Geogebratube.

http://www.geogebratube.org/

Historia Pirámides Egipcio Tales.

http://navegandoentrenumeros.blogspot.com.es/2013/05/medir-la-altura-de-las-piramides.html

Proposiciones libro VI Elementos de Euclides

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/06/proposicioneslibro6.htm

http://www.math.ubc.ca/~cass/euclid/byrne.html

J. Anexo

A continuación se detallan la resolución de los problemas, que realizará el profesor en el aula. Estos problemas están planteados en el campo de problemas propuesto.

Campo 1: Figuras semejantes. Razón de semejanza.

PROBLEMA 1.1:

Las siguientes ternas de números representan las longitudes ordenadas de los lados de una pareja de triángulos semejantes. Calcula, en cada caso, la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

a) 3, 4, 6 4.5, x, y

b) x, 4, 3 2, 2, y

Solución:

a) $\frac{4.5}{3} = \frac{x}{4} = \frac{y}{6}$

$$\frac{4.5}{3} = \frac{x}{4} \Rightarrow 4.5 \cdot 4 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4.5 \cdot 4}{3} = 6$$

$$\frac{4.5}{3} = \frac{y}{6} \Rightarrow 4.5 \cdot 6 = 3 \cdot y \Rightarrow y = \frac{4.5 \cdot 6}{3} = 9$$

La razón de semejanza es: $\frac{4.5}{3} = 1.5 = \frac{3}{2}$

PROBLEMA 1.2:

Las medidas de un rectángulo son 5 y 10 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que el lado mayor mida 5 centímetros. ¿Cuál es la razón de semejanza?

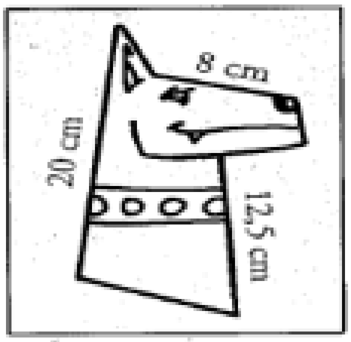
Solución:

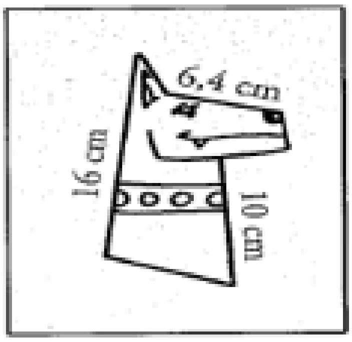
Haciendo la proporcionalidad entre los lados del rectángulo, queda:

$$\frac{10}{5} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

PROBLEMA 1.4:

Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha. ¿Cuál ha sido la reducción?





Solución:

Haciendo la proporcionalidad entre los lados de la figura queda:

$$\frac{6,4}{8} = 0,8$$

$$\frac{10}{12,5} = 0,8$$

$$\frac{16}{20} = 0,8$$

La razón de semejanza es 0,8. Como en una fotocopiadora la razón de semejanza se calcula con porcentajes, la reducción es del 80%.

Campo 2: Razón de longitudes y áreas.

PROBLEMA 2.4:

Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero, sabiendo que el perímetro del segundo triángulo semejante a él es de 18 cm y que la razón entre las áreas de dichos triángulos es $\frac{9}{16}$.

Solución:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{9}{16} = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$\frac{P_2}{P_1} = k = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{18}{P_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 \cdot P_1 = 18 \cdot 4 \Rightarrow P_1 = \frac{18 \cdot 4}{3} = 24$ cm.

Como son triángulos equiláteros, todos los lados miden lo mismo; por tanto, la longitud del lado del primer triángulo equilátero es: $\frac{18}{3} = 6$ cm.

Campo 3a: Escalas. Distancias y áreas en un mapa.

PROBLEMA 3a.3:

En un mapa se indica que la escala es 1:25000. ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la representada? Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de 15,5 centímetros, ¿cuál será la distancia real que las separa? Da el resultado en kilómetros.

Solución:

Distancia mapa $\xrightarrow{Directa}$ Distancia real

$1 \longrightarrow 25.000$

$15{,}5 \longrightarrow x$

Se forma la proporción:

$\frac{1}{15{,}5} = \frac{25.000}{x} \Rightarrow x = 25.000 \cdot 15{,}5 = 387500\ cm = 3{,}875$ km separa en la realidad las dos ciudades.

PROBLEMA 3a.4:

La distancia entre dos ciudades es de 350 kilómetros y la distancia que las separa en un mapa es de 7 centímetros. ¿Cuál es la escala de dicho mapa?

Solución:

Es una escala de ampliación. Por ello es de la forma 1:x.

Distancia mapa $\xrightarrow{Directa}$ Distancia real

$1 \longrightarrow x$

$7 \longrightarrow 35000000$

Por reducción a la unidad:

$x = \frac{35000000}{7} = 5000000.$

Por tanto, la escala es de la forma 1:5.000.000.

<u>PROBLEMA 3a.7:</u>

Una habitación está representada a escala 1:50. Si su superficie en la realidad es de 10 m^2, ¿cuál será su superficie en el plano?

<u>Solución:</u>

Área mapa $\xrightarrow{Directa}$ Área real

1 $\longrightarrow$ 50^2

x $\longrightarrow$ 100000

Se forma la proporción:

$\frac{1}{x} = \frac{2500}{100000} \Rightarrow x = \frac{100000}{50^2} = \frac{100000}{2500} = 40$ cm^2 será la superficie en el plano.

Campo 3b: Escalas. Distintas formas de expresar la escala.

<u>PROBLEMA 3b.1:</u>

Relacionada cada una de las escalas dadas en forma gráfica con cada una de las escalas dadas mediante una proporción numérica:

i) 

iii) 

ii) 

iv) 

a) 1:500 000

b) 1:500

c) 1:1 200 000

d) 1:1 200

Solución:

En la escala gráfica i), te dice que 1 cm en el mapa equivale a 12 m en la realidad (midiendo lo que mide el rectángulo). Así, esta escala gráfica corresponde a la escala numérica 1:1200, que es la d).

De manera análoga, la escala gráfica ii) corresponde a la escala numérica 1:500, que es la b).

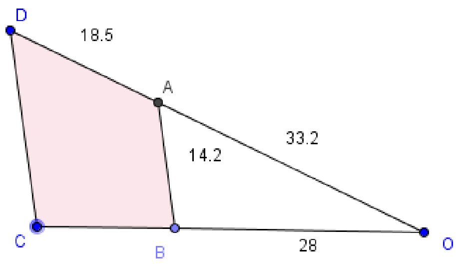
La escala gráfica iii) corresponde a la escala numérica 1:1200000, que es la c).

La escala gráfica iv) corresponde a la escala numérica 1:500000, que es la a).

Campo 4: Semejanza de triángulos. Teorema de Tales. Triángulo en posición de Tales.

PROBLEMA 4.3:

En la siguiente figura, halla las longitudes de los lados BC y CD:



Solución:

$$\frac{33,2}{28} = \frac{18,5}{BC} \Rightarrow 33,2 \cdot BC = 18,5 \cdot 28 \Rightarrow x = \frac{18,5 \cdot 28}{33,2} = 15,6$$

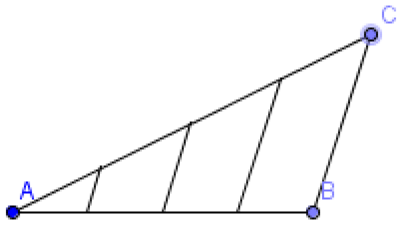
$$\frac{33,2}{14,2} = \frac{33,2 + 18,5}{CD} = \frac{51,7}{CD} \Rightarrow 33,2 \cdot CD = 14,2 \cdot 51,7 \Rightarrow x = \frac{14,2 \cdot 51,7}{33,2} = 22,1$$

Campo 5: División de segmentos en partes iguales y en partes proporcionales.

PROBLEMA 5.1:

Dibuja un segmento AB de 3 cm de longitud y divídelo en cuatro partes iguales.

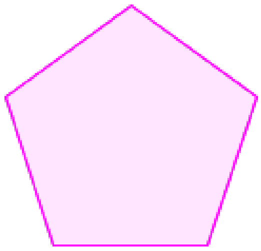
Solución:



Campo 6: Construcción de polígonos semejantes.

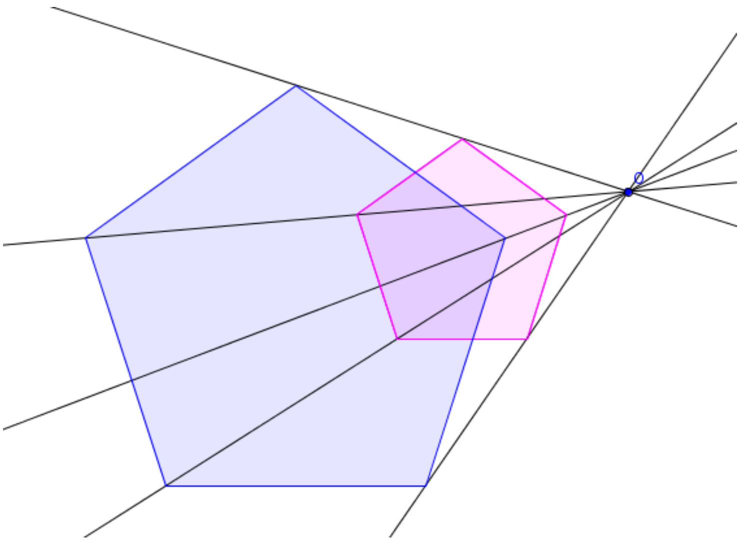
PROBLEMA 6.1:

Construir un pentágono semejante a ABCDE siendo la escala 2:1



Solución:

El pentágono semejante al anterior, por homotecia es el siguiente:



Campo 7: Criterios para determinar la semejanza de triángulos.

PROBLEMA 7.1:

Comprueba si son semejantes las parejas de triángulos.

a) $\hat{A}$ = 43º, $\hat{C}$ = 81º

$\widehat{A'}$ = 43º, $\widehat{B'}$ = 56º

b) a= $10,\ b = 20,\ c = 30$

$a' = 20,\ b' = 30,\ c' = 50$

c) $\hat{A}$ = 30º, $b = 3,\ c = 5$

$\hat{A}'$ = 30º, $b' = 6,\ c' = 10$

d) $\hat{A}$ = 45º, $b = 2,\ c = 7$

$\hat{A}'$ = 45º, $b' = 4,\ c' = 5$

Solución:

a) Veamos si los dos triángulos tienen dos ángulos iguales:

$\hat{A} = \widehat{A'} = 43º$

$\hat{C} = 81º$

$\hat{C}' = 180° - \widehat{A'} - B' = 180° - 43° - 56° = 81°$

Luego tiene dos ángulos iguales los dos triángulos, y por el segundo criterio, son semejantes.

b) Veamos si los dos triángulos tienen los tres lados proporcionales:

$$\frac{a'}{a} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{30}{20} = 1{,}5$$

Luego los triángulos no tienen los tres lados proporcionales, y por el primer criterio, los triángulos no son semejantes.

c) Veamos si los dos triángulos tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual:

$\hat{A} = \widehat{A'} = 30º$

$$\frac{b'}{b} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{10}{5} = 2$$

Como los triángulos tienen los lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual, por el tercer criterio, los triángulos son semejantes.

d) Veamos si los dos triángulos tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual:

$\hat{A} = \widehat{A'} = 45º$

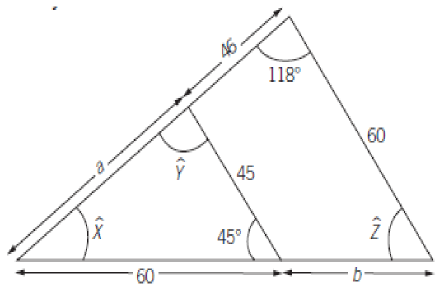
$\frac{b'}{b} = \frac{4}{2} = 2$

$\frac{c'}{c} = \frac{5}{7} \neq 2$

Como los triángulos no tienen los lados proporcionales, por el tercer criterio, los triángulos no son semejantes.

<u>PROBLEMA 7.4:</u>

Halla los valores de los ángulos $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$, y de los lados a y b de la siguiente figura:



<u>Solución:</u>

Como los triángulos son semejantes porque están en posición de Tales, los tres ángulos tienen que ser iguales en los dos triángulos. Así:

$\hat{Y} = 118°$

$\hat{Z} = 45°$

$\widehat{X} = 180° - 118° - 45° = 17°$

Como los triángulos son semejantes, los lados tienen que ser proporcionales. Por ello:

$$\frac{a}{45} = \frac{a+46}{60} \Rightarrow 60a = 45a + 2070 \Rightarrow 60a - 45a = 2070 \Rightarrow 15a = 2070 \Rightarrow$$

$$a = \frac{2070}{15} = 138$$

$$\frac{60}{45} = \frac{60+b}{60} \Rightarrow 60 \cdot 60 = 45 \cdot (60+b) \Rightarrow$$

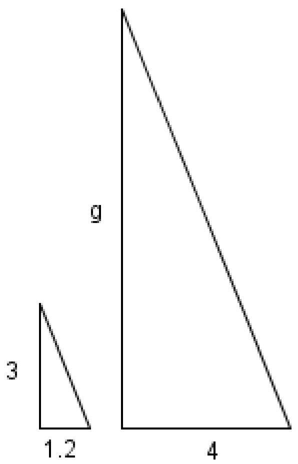
$$\Rightarrow 3600 = 2700 + 45b \Rightarrow 3600 - 2700 = 45b \Rightarrow 900 = 45\,b \Rightarrow b = \frac{900}{45} = 20$$

Campo 8: Calcular distancias inaccesibles.

PROBLEMA 8.1:

Un árbol de 3 metros de altura da una sombra de 1,2 metros. ¿Cuál es la altura de un monumento cuya sombra es de 4 metros?

Solución:



$\frac{4}{1,2} = \frac{g}{3} \Rightarrow 4 \cdot 3 = 1,2 \cdot g \Rightarrow g = \frac{12}{1,2} = 10$ metros es la altura de un monumento cuya sombra es de 4 metros.